Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (11) Pozitivně definitní matice II

Definice 1 *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Matice A je* pozitivně semidefinitní, *pokud pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x^TAx \geq 0$ a A je* pozitivně definitní, *pokud pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x^TAx > 0$.*

Věta 1 (Choleského rozklad) *Pro každou pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$.*

Cv. 1. Otestujte pozitivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Cv. 2. Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou pozitivně semidefinitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3. Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4. Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 13 & -13 & 9 \\ 5 & -13 & 42 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 5. Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně semidefinitní matice je pozitivně semidefinitní matice.

Cv. 6. Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.