Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (11) Pozitivně definitní matice II

Definice 1 *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Matice A je* pozitivně semidefinitní, *pokud pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x^T Ax \geq 0$ a A je* pozitivně definitní, *pokud pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x^T Ax > 0$.*

Věta 1 (Choleského rozklad) *Pro každou pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$.*

Cv. 1. Otestujte pozitivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Pro každou pozitivně definitní matici existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$ (Choleského rozklad). K dokázání pozitivní definitnosti matice A nám tedy stačí nalézt takovou matici L.

Při konstrukci postupujeme stejně jako algoritmus ze skript. Protože je L dolní trojúhelníková, víme, že část prvků tvoří nuly.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} = LL^T$$

Určíme nejprve prvek ℓ_{11}. Protože prvek a_{11} je dán maticovým násobením prvního řádku matice L s prvním sloupcem matice L^T (který odpovídá prvnímu řádku), můžeme zapsat $a_{11} = \ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 + \ell_{13}^2$. Prvky ℓ_{12}, ℓ_{13} se nicméně rovnají nule, tedy platí $4 = a_{11} = \ell_{11}^2$ a proto $\ell_{11} = 2$ (fakticky máme dvě možnosti: 2 a -2, ale hodnotu 2 volíme proto, že L musí mít kladnou diagonálu).

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že když budeme pokračovat v násobení prvního řádku L se zbylými sloupci L^T, kvůli nulám v prvním řádku dostáváme rovnici $a_{1k} = (L)_{11}(L^T)_{1k} = 2\ell_{k1}$. Díky té snadno určíme prvky v prvním sloupci L jako $\ell_{k1} = \frac{a_{1k}}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & \bullet & 0 \\ 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Pokračujeme výpočtem ℓ_{22}. Podobně jako při určování předchozího diagonálního prvku, dostáváme vynásobením druhého řádku a druhého sloupce rovnici $10 =$

$a_{22} = \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 + \ell_{23}^2 = (-1)^2 + \ell_{22}^2 + 0^2$. Po úpravě dostáváme $l_{22}^2 = 9$ a tedy $\ell_{22} = 3$ kvůli pozitivitě diagonály.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Díky tomu, že druhý řádek matice L je kompletní, můžeme dopočítat podobně jako předtím i druhý sloupec L.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Celý cyklus opakujeme ještě jednou pro třetí sloupec matice L. Nejprve spočítáme diagonální prvek $\ell_{33} = 1$ a poté i ostatní prvky v třetím sloupci (žádné už nejsou). Dostáváme rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^T.$$

Matice A je tudíž pozitivně definitní.

Uvědomme si dále, že jsme v průběhu konstrukce nikdy neměli na vybranou, jaký prvek pro libovolné ℓ_{ij} zvolit. Jediná situace byla, když jsme určovali diagonální prvky, ale protože diagonála musí být kladná, měli jste stejně jen jedno řešení. Tedy matice L je skutečně dána jednoznačně.

Cv. 2. Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou pozitivně semidefinitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Matice A a B jsou pozitivně definitní a jejich Choleského rozklad je

$$A = L_A L_A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = L_B L_B^T \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}.$$

Matice C naopak není pozitivně semidefinitní.

Cv. 3. Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Protože je matice E pozitivně definitní, lze rozložit do tvaru $E = LL^T$. Pro její inverzi tedy platí $E^{-1} = (LL^T)^{-1} = L^{-T}L^{-1}$. Místo počítání inverze přímo tedy můžeme spočítat nejprve Choleského rozklad, následně inverzi dolní trojúhelníkové matice L a na závěr vzniklou inverzi L^{-1} vynásobíme s její transpozicí.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Takovýto postup může být někdy výpočetně méně náročný, než počítat inverzi matice E přímo.

Cv. 4. Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 13 & -13 & 9 \\ 5 & -13 & 42 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Choleského rozklad matice je $A = LL^T$, kde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme substituci $L^Tx = y$. Tedy $b = Ax = LL^Tx = Ly$.

Protože matice (L, L^T) obou soustav jsou v odstupňovaném tvaru, stačí provést jen dvakrát zpětnou substituci. Řešením obou soustav tedy dostaneme $x = (1, 2, 0, -1)^T$.

Cv. 5. Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně semidefinitní matice je pozitivně semidefinitní matice.

Řešení:
První způsob:
Pro sudé mocniny: $x^TA^kx = x^TA^{\frac{k}{2}}IA^{\frac{k}{2}}x = y^TIy \geq 0$.
Pro liché mocniny: $x^TA^kx = x^TA^{\frac{k-1}{2}}AA^{\frac{k-1}{2}}x = y^TAy \geq 0$.

Druhý způsob: Protože matice A je pozitivně semidefinitní, má nezáporná vlastní čísla $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Matice A^k má vlastní čísla jejich k-té mocniny $\lambda_1^k, \dots \lambda_n^k$, které jsou taky nezáporné. Tudíž A^k je pozitivně semidefinitní.

Cv. 6. Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.

Řešení:
Ukážeme postupně, že $\preccurlyeq$ splňuje reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

- Pro každou matici A je výraz $A \preccurlyeq A$ ekvivalentní tomu, že $A - A = 0_n$ je pozitivně semidefinitní. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^T 0_n x = 0$, tedy 0_n je pozitivně semidefinitní a $\preccurlyeq$ je reflexivní.
- Pokud pro dvojici matic A, B platí, že $A \preccurlyeq B$ a zároveň $B \preccurlyeq A$, znamená to, že obě matice $B - A$ i $A - B$ jsou pozitivně semidefinitní matice. Tedy pro libovolný vektor x platí, že $x^T(B - A)x \geq 0$ a také $x^T(A - B)x \geq 0$, neboli $x^T Bx - x^T Ax \geq 0$ a $x^T Ax - x^T Bx \geq 0$. To můžeme upravit na $x^T Bx \geq x^T Ax$ a zároveň $x^T Ax \geq x^T Bx$, z čehož plyne, že $x^T Ax = x^T Bx$. Protože jsme zvolili libovolné x, platí to pro všechny vektory, čímž dostáváme rovnost $A = B$. Relace $\preccurlyeq$ je tedy antisymetrická.
- Mějme matice A, B, C takové, že $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq C$. Tedy $M = B - A$ a $N = C - B$ jsou pozitivně semidefinitní matice. Všimněme si, že $M + N = (B - A) + (C - B) = C - A$. Pokud je tedy $M + N$ pozitivně semidefinitní, potom platí, že $A \preccurlyeq C$. Protože ale pro každé x platí $x^T Mx \geq 0$ a $x^T Nx \geq 0$, také $x^T(M + N)x = x^T Mx + x^T Nx \geq 0$. Relace $\preccurlyeq$ je tedy transitivní.