Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (10) Pozitivně definitní matice I

Definice 1 *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je symetrická. Matice* A *je* pozitivně semidefinitní, *pokud pro všechna* $x \in \mathbb{R}^n$ *platí, že* $x^TAx \geq 0$ *a* A *je* pozitivně definitní, *pokud pro všechna nenulová* $x \in \mathbb{R}^n$ *platí, že* $x^TAx > 0$.

Věta 1 *Matice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je pozitivně definitní (semidefinitní) právě tehdy, když jsou její vlastní čísla čísla kladná (nezáporná).*

Věta 2 (Rekurentní vzorec) *Symetrická matice* $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když* $\alpha > 0$ *a* $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ *je pozitivně definitní.*

Věta 3 (Gaussova eliminace) *Symetrická matice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když ji Gaussova převede do odstupňovaného tvaru s kladnou diagonálou za použití pouze elementární úpravy přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku pod ním.*

Věta 4 (Sylvestrovo kriterium) *Symetrická matice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic* $A_1, \ldots, A_n$ *jsou kladné, přičemž* A_i *je levá horní podmatice* A *velikosti* i *(tj. vznikne z* A *odstraněním posledních* $n - i$ *řádků a sloupců).*

Cv. 1. Otestujte pozitivní definitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Cv. 2. Ukažte, že čtvercová matice A je negativně (semi)definitní právě tehdy, když $-A$ je pozitivně (semi)definitní.

Cv. 3. Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Cv. 4. Ukažte, že $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická pozitivně definitní právě tehdy, když zobrazení $\langle x, y\rangle_A := x^T Ay$ představuje skalární součin.

Cv. 5. Ukažte, že matice

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je symetrická pozitivně definitní, a to pomocí tvrzení z předchozí úlohy.

Cv. 6. Ukažte, že pro pozitivně definitní matice A a B:

(a) Je i matice $A + B$ pozitivně definitní.

(b) Je i matice A^{-1} pozitivně definitní (t.j. ukažte zároveň, že A je regulární).