Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (9) Vlastní čísla IV

Věta 1 (Gerschgorinovy disky) *Každé vlastní číslo λ matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ leží v kruhu o středu a_{ii} a poloměru $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1,\dots,n\}$.*

Věta 2 (Spektrální rozklad symetrických matic) *Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $A = Q\Lambda Q^T$.*

Věta 3 (Courant-Fischer) *Nechť $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak*

$$\lambda_1 = \max_{x:||x||_2=1} x^T Ax, \lambda_n = \min_{x:||x||_2=1} x^T Ax$$

Věta 4 (Perron) *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kladná matice (tj. $a_{ij} > 0$ pro všechna i, j). Pak největší (v absolutní hodnotě) vlastní číslo je reálné kladné, je jediné, a příslušný vlastní vektor je kladný (ve všech složkách). Navíc žádnému jinému vlastnímu číslu neodpovídá nezáporný vlastní vektor.*

Cv. 1. Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Cv. 2. Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Cv. 3. Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte takové matice $A \geq 0$, pro které postupně platí vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,

(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,

(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Cv. 4. Buď v vlastní vektor symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte:

$$w \in \{v\}^\perp \Rightarrow Aw \in \{v\}^\perp.$$

Cv. 5. Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické. Dokažte $\lambda_1(A + B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.

Cv. 6. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická matice s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Dokažte, že $\lambda_1 \geq a_{ii} \geq \lambda_n$ pro každé $i = 1,\dots,n$.