Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021):
(9) Vlastní čísla IV

Věta 1 (Gerschgorinovy disky) *Každé vlastní číslo λ matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ leží v kruhu o středu a_{ii} a poloměru $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1,\dots,n\}$.*

Věta 2 (Spektrální rozklad symetrických matic) *Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $A = Q\Lambda Q^T$.*

Věta 3 (Courant-Fischer) *Nechť $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak*

$$\lambda_1 = \max_{x:||x||_2=1} x^T Ax, \lambda_n = \min_{x:||x||_2=1} x^T Ax$$

Věta 4 (Perron) *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kladná matice (tj. $a_{ij} > 0$ pro všechna i, j). Pak největší (v absolutní hodnotě) vlastní číslo je reálné kladné, je jediné, a příslušný vlastní vektor je kladný (ve všech složkách). Navíc žádnému jinému vlastnímu číslu neodpovídá nezáporný vlastní vektor.*

Cv. 1. Určete Gerschgorinovy disky pro matici

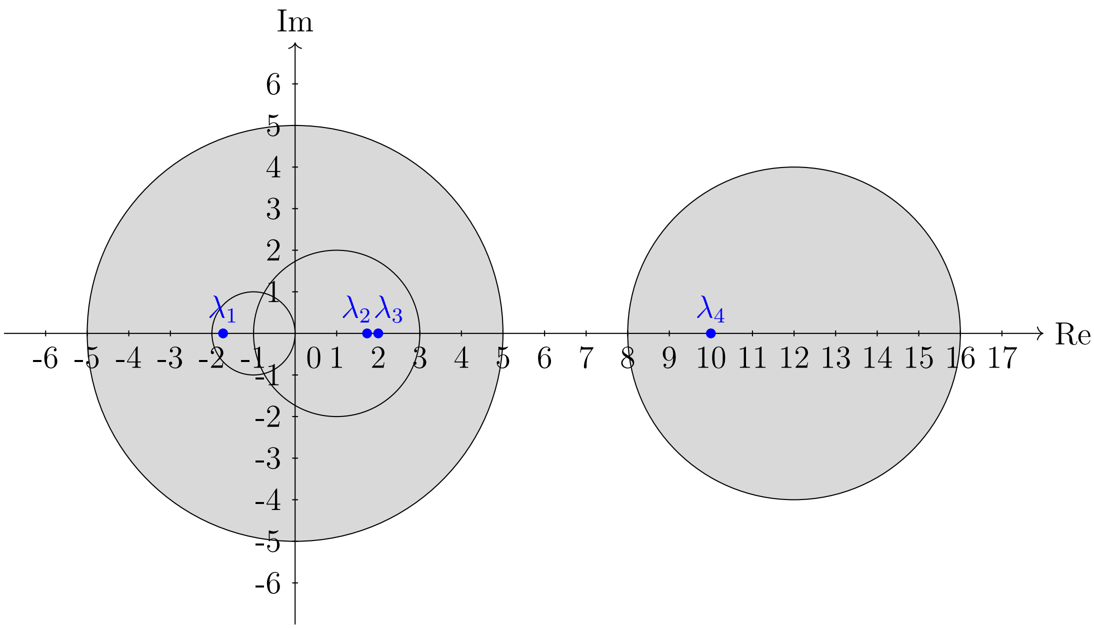
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Řešení:

Dle věty o Gerschgorinových discích víme, že každé vlastní číslo matice A leží v kruhu $B(c_i, r_i)$ o středu $c_i = a_{ii}$ a poloměru $r_i = \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1,\dots,4\}$. Pro zadanou matici A dostáváme následující kruhy (viz také obrázek níže):

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_{11} = 1, & r_1 &= |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |0| + |-2| + |0| = 2,\\
c_2 &= a_{22} = 12, & r_2 &= |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |0| + |0| + |-4| = 4,\\
c_3 &= a_{33} = -1, & r_3 &= |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |-1| + |0| + |0| = 1,\\
c_4 &= a_{44} = 0, & r_4 &= |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |5| + |0| = 5.
\end{aligned}$$



Navíc víme, že každá komponenta souvislosti obsahuje tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla. V kruhu $B(c_4, r_4) = B(0, 5)$ tedy leží 3 vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ matice A a v kruhu $B(c_2, r_2) = B(12, 4)$ jedno vlastní číslo λ_4.

Komplexní vlastní čísla reálné matice můžeme spárovat do dvojic navzájem komplexně sdružených čísel, vlastní číslo λ_4 proto musí být reálné (jinak by v kruhu $B(12, 4)$ muselo ležet i vlastní číslo $\overline{\lambda_4}$). V kruhu $B(0, 5)$ leží 3 vlastní čísla, aspoň jedno z nich musí být také reálné. Nahlédli jsme tedy, že matice A má alespoň 2 reálná vlastní čísla. Výpočtem můžeme zjistit, že vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$ a $\lambda_4 = 10$.

Cv. 2. Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Určíme Gerschgorinovy disky a zjistíme, zda matice může mít vlastní číslo $\lambda = 0$. Vlastní číslo $\lambda = 0$ nemůže ležet v žádném z disků, matice je proto regulární.

Cv. 3. Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte takové matice $A \geq 0$, pro které postupně platí vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,

(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,

(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Řešení:

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Cv. 4. Buď v vlastní vektor symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte:

$$w \in \{v\}^{\perp} \Rightarrow Aw \in \{v\}^{\perp}.$$

Řešení:
Jelikož je A symetrická, tak existuje ortonormální báze vlastních vektorů $x_1, \ldots, x_n$. Navíc z důkazu existence spektrálního rozkladu (Věty 2) můžeme předpokládat, že $v = \alpha_1 \cdot x_1$. Tedy $w = \sum_{i>1} \alpha_i x_i$ a

$$Aw = \sum_{i>1} \alpha_i \cdot Ax_i = \sum_{i>1} \alpha_i \lambda_i x_i.$$

Tedy Aw je také kolmé na $v = \alpha_1 \cdot x_1$.

Cv. 5. Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické. Dokažte $\lambda_1(A+B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.

Řešení:
Pomocí Courant-Fischerovy věty:

$$\begin{aligned}\lambda_1(A+B) &= \max_{x:||x||_2=1} x^T(A+B)x = \max_{x:||x||_2=1} x^T Ax + x^T Bx \\ &\leq \max_{x:||x||_2=1} x^T Ax + \max_{x':||x'||_2=1} x'^T Bx' = \lambda_1(A) + \lambda_1(B).\end{aligned}$$

Cv. 6. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická matice s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dokažte, že $\lambda_1 \geq a_{ii} \geq \lambda_n$ pro každé $i = 1, \ldots, n$.

Řešení:
Pomocí Courant-Fischerovy věty aplikované na vektory e_i.

$$a_{ii} = e_i^T A e_i$$

Tedy pro libovolné i:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \max_{x:||x||_2=1} x^T Ax \geq e_i^T A e_i = a_{ii} \\ \lambda_n &= \min_{x:||x||_2=1} x^T Ax \leq e_i^T A e_i = a_{ii}\end{aligned}$$