

Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021):
(8) Vlastní čísla III

Definice 1 *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ je příslušný vlastní vektor, pokud $Ax = \lambda x, x \neq 0$.*

Definice 2 *Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou podobné, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ taková, že $A = SBS^{-1}$.*

Definice 3 *Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, pokud je podobná diagonální matici.*

Cv. 1. Matici B převedte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní vektory, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cv. 2. Ve městě Matfyzákově fungují tři lokální politické strany, a to Anarchisté (A), Bláhoví (B) a Cílevědomí (C). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany A volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k B přejde 5 % a k C dokonce 20 %. Z voličů B přejde k A rovných 20 % a k C také 20 %. Nakonec, z voličů C zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi A a B. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Cv. 3. Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Cv. 4. Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Cv. 5. Najděte matici A jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$ a příslušné vlastní vektory jsou $x_1 = (1, 2)^T$ a $x_2 = (2, 5)^T$.

Cv. 6. Ukažte, že pokud je λ vlastní číslo reálné matice A pak $i\bar{\lambda}$ je vlastní číslo matice A .