Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (8) Vlastní čísla III

Definice 1 *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je* vlastní číslo *matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ je příslušný* vlastní vektor*, pokud $Ax = \lambda x, x \neq 0$.*

Definice 2 *Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou* podobné*, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že $A = SBS^{-1}$.*

Definice 3 *Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je* diagonalizovatelná*, pokud je podobná diagonální matici.*

Cv. 1. Matici B převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní vektory, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Ne všechny matice jsou diagonalizovatelné, například matice B. Všechny matice jsou ale podobné matici v Jordanově normálním tvaru. Ten si nyní pro matici B spočteme.

Hledáme tedy regulární matici S a matici v Jordanově normálním tvaru J takové, že $B = SJS^{-1}$. Začneme stejně, jako kdybychom chtěli ověřit, zda je matice diagonalizovatelná, tedy spočteme vlastní čísla a vlastní vektory. Charakteristický polynom vypadá:

$$p_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1$. Jádro matice $(B - 2I)$ má dimenzi 1, konkrétně $\mathrm{Ker}(B - 2I) = \mathrm{span}\{(1, 0, 1)^T\}$. Vlastní číslo $\lambda = 2$ má algebraickou násobnost 2 (je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu), ale jeho geometrická násobnost je rovna 1 (přísluší mu pouze jeden vlastní vektor). Matice B tudíž nemá 3 lineárně nezávislé vlastní vektory.

Přistoupíme tedy k výpočtu zobecněných vlastních vektorů pro vlastní číslo λ_1. Spočteme $\mathrm{Ker}\left((B - 2I)^2\right) = \mathrm{span}\left\{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\right\}$. Nyní zvolíme zobecněný vlastní vektor x_2 z $\mathrm{Ker}((B - 2I)^2) \setminus \mathrm{Ker}(B - 2I)$, například $x_2 = (0, 0, 1)^T$. Dopočteme vlastní vektor x_1,

$$x_1 = (B - 2I)x_2 = (1, 0, 1)^T.$$

Soustava $(A - 1I)x = 0$ má řešení $\mathrm{span}\{(2, -1, 1)^T\}$. Získáváme hledanou matici S.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Také vypočteme její inverzi S^{-1}

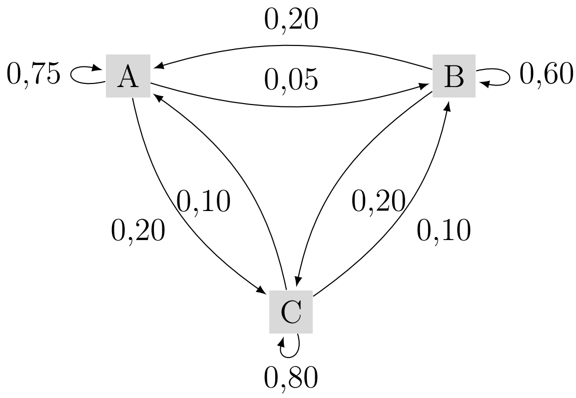
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici B lze nyní zapsat pomocí Jordanova normálního tvaru např. jako

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = S\ JS^{-1}.$$

Cv. 2. Ve městě Matfyzákově fungují tři lokální politické strany, a to Anarchisté (A), Bláhoví (B) a Cílevědomí (C). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany A volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k B přejde 5 % a k C dokonce 20 %. Z voličů B přejde k A rovných 20 % a k C také 20 %. Nakonec, z voličů C zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi A a B. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Řešení:
Pravidla pro volby v Matfyzákově ilustruje následující diagram:



Vrcholy grafu reprezentují stavy (volené politické strany) a hrany přechody mezi danými stavy, tedy přesuny voličů mezi těmito stranami. Pro výpočet výsledného rozdělení sestavíme přechodovou matici P, kde p_{ij} reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

První sloupec matice P tedy reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu A do stavu A (75 % voličů opět volí stranu Anarchistů), do stavu B (5 % bude volit stranu Bláhových) a do stavu C (20 % volí Cílevědomé).

Pokud je počáteční rozložení sil dáno stavovým vektorem $x_0 \in \mathbb{R}^3$, vývoj situace v čase popisují stavy $x_0, Px_0, P^2x_0, \ldots, P^\infty x_0$, kde $P^\infty x_0$ označuje $\lim_{k\to\infty} P^k$ (pokud existuje).

Diagonalizací matice P dostaneme

$$P = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}55 \end{pmatrix} S^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$P^{\infty} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = S_{*1} S^{-1}_{1*} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Limitní stav odpovídá vektoru $P^{\infty} x_0 = \frac{1}{6}(2e^T x_0, e^T x_0, 3e^T x_0)$, rozložení podpory stran se tedy ustálí v poměru $2 : 1 : 3$.

Jelikož je matice P kladná, výsledné rozložení odpovídá složkám vlastního vektoru $v = S_{*1}$, který přísluší vlastnímu číslu 1. Hledaný poměr tedy můžeme také přímo najít jako složky kladného vektoru $v \in \operatorname{Ker}(P - 1 \cdot I_3)$.

Cv. 3. Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Řešení:
Sestrojte přechodovou matici A pro přesun látky mezi buňkami a spočítejte vektor $A^{\infty} x_0$ reprezentující limitní stav (můžete využít fakt, že přechodová matice je kladná). Množství látky v buňkách se ustálí v poměru $1 : 2$.

Cv. 4. Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Řešení:
Buď x vlastní vektor matice A. Pro spor předpokládejme, že x přísluší vlastním číslům λ_1, λ_2, přičemž $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax = \lambda_1 x$ a zároveň $Ax = \lambda_2 x$. Potom ale dostáváme $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, neboli

$$\lambda_1 x - \lambda_2 x = (\lambda_1 - \lambda_2) x = 0.$$

To znamená, že platí $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ nebo $x = 0$. Vlastní vektor x je z definice nenulový, musí proto platit $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$, což je spor s předpokladem $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Cv. 5. Najděte matici A jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$ a příslušné vlastní vektory jsou $x_1 = (1, 2)^T$ a $x_2 = (2, 5)^T$.

Řešení:
Jelikož jsou vlastní vektory nezávislé, víme, že A je diagonalizovatelná. Konkrétně A lze rozložit na součin SDS^{-1}, kde sloupce S jsou vlastní vektory a D má na diagonále vlastní čísla. Tedy dostáváme

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Spočteme inverzní matici k matici S:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme dopočítat matici A:

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6. Ukažte, že pokud je λ vlastní číslo reálné matice A pak i $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo matice A.

Řešení:
λ i $\overline{\lambda}$ jsou kořeny charakteristického polynomu.