Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (7) Vlastní čísla II

Definice 1 *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Pak* $\lambda \in \mathbb{C}$ *je* vlastní číslo *matice* A *a* $x \in \mathbb{C}^n$ *je příslušný* vlastní vektor, *pokud* $Ax = \lambda x, x \neq 0$.

Definice 2 *Matice* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jsou* podobné, *pokud existuje regulární* $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *taková, že* $A = SBS^{-1}$.

Definice 3 *Matice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je* diagonalizovatelná, *pokud je podobná diagonální matici.*

Cv. 1. Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Dokažte, že pak platí:

(a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(b) matice αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(c) matice $A+\alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1+\alpha, \ldots, \lambda_n+\alpha$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Cv. 2. Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $A_3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Cv. 3. Ukažte, že matice B není diagonalizovatelná:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4. Pro diagonalizovatelnou matici C spočtěte třetí mocninu a druhou odmocninu. Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

Cv. 5. U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.