Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (7) Vlastní čísla II

Definice 1 *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. Pak* $\lambda \in \mathbb{C}$ *je* vlastní číslo *matice* A *a* $x \in \mathbb{C}^n$ *je příslušný* vlastní vektor*, pokud* $Ax = \lambda x, x \neq 0$.

Definice 2 *Matice* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jsou* podobné*, pokud existuje regulární* $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *taková, že* $A = SBS^{-1}$.

Definice 3 *Matice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je* diagonalizovatelná*, pokud je podobná diagonální matici.*

Cv. 1. Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Dokažte, že pak platí:

(a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(b) matice αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(c) matice $A+\alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1+\alpha, \ldots, \lambda_n+\alpha$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Řešení:

(a) Nechť λ_i je vlastní číslo matice A a x_i je jemu příslušný vlastní vektor. Pak podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax_i = \lambda_i x_i$.
Chceme ukázat, že λ_i^2 je vlastní číslo matice $A^2 = AA$ s odpovídajícím vlastním vektorem x_i, tedy, že platí rovnost $A^2 x_i = \lambda_i^2 x_i$. S využitím vztahu $Ax_i = \lambda_i x_i$ dostáváme

$$A^2 x_i = (AA)x_i = A\ (Ax_i) = A\ (\lambda_i x_i) = \lambda_i (A\ x_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

(b) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme dokázat, že matice αA má vlastní číslo $\alpha\lambda_i$ a příslušný vlastní vektor x_i, tedy $(\alpha A)x_i = (\alpha\lambda_i)x_i$. Platí:

$$(\alpha A)x_i = \alpha(A\ x_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = (\alpha\lambda_i)x_i.$$

(c) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme dokázat, že pro matici $A+\alpha I_n$ platí rovnost $(A+\alpha I_n)x_i = (\lambda_i+\alpha)x_i$. Podobně jako v předchozích částech dostaneme:

$$(A\ +\alpha I_n)x_i = A\ x_i + (\alpha I_n)x_i = \lambda_i x_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

(d) Pro důkaz této části můžeme využít fakt, že vlastní čísla matice A jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Z vlastností determinantu víme, že transpozice matice hodnotu determinantu nemění, tudíž platí

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A^T - \lambda I_n).$$

Protože je ale zároveň $\det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$ charakteristický polynom matice A^T, má matice A^T stejná vlastní čísla jako matice A.

Vlastní vektory matice a její transpozice mohou být obecně různé, např. matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(\alpha, 0)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$, zatímco matice $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(0, \alpha)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Cv. 2. Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $A_3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Řešení</u>:

(a) Aby vše fungovalo, musí být matice S regulární, tedy matice A_1 musí mít n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Spočtěme tedy vlastní čísla matice A_1. Charakteristický polynom matice A_1 je

$$p_{A_1}(\lambda) = (4 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Vlastní čísla se tedy rovnají $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$. Příslušné vlastní vektory získáme vyřešením homogenní soustavy rovnic $(A_1 - \lambda I) = 0$, kde za λ dosadíme postupně konkrétní vlastní čísla. Vyjdou tedy vektory $x_1 = c \cdot (1, 0, 2)^T$, $x_2 = c \cdot (1, 1, 1)^T$ a $x_3 = c \cdot (0, 0, 1)^T$. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Matice A_1 je tedy diagonalizovatelná a můžeme ji napsat ve tvaru SDS^{-1}, kde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Postupujeme stejně jako u matice A_1 jen zde vyjdou komplexní vlastní čísla. Charakteristický polynom matice A_2 se rovná $p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Kořeny polynomu p_{A_2} jsou $1 + i$ a $1 - i$ a k nim příslušné vlastní vektory $(1, 1 + i)^T$ a $(1, 1 - i)^T$. Matici A_2 tedy můžeme naspat ve tvaru SDS^{-1} pro matice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + i & 1 - i \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

(c) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Cv. 3. Ukažte, že matice B není diagonalizovatelná:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice B má vlastní číslo 0 s algebraickou násobností 2. Pokud by tedy byla diagonalizovatelná, pak by musela být podobná nulové matici. Tedy pro nějako regulární matici S,

$$B = S0S^{-1} = 0.$$

Cv. 4. Pro diagonalizovatelnou matici C spočtěte třetí mocninu a druhou odmocninu. Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Mějme $C = SDS^{-1}$ pro diagonální matici D. Všimněme si, že

$$C^k = \left(SDS^{-1}\right)^k = SD^kS^{-1}.$$

Obdobně $SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} \cdot SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} = SDS^{-1}$, kde $D^{\frac{1}{2}}$ je diagonální matice, kde jsou na diagonále odmocniny diagonálních prvků matice D, tedy $D^{\frac{1}{2}}_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}}$.

Třetí mocninu matice C tedy spočteme jako SD^3S^{-1} a odmocninu jako $SD^{\frac{1}{2}}S^{-1}$.

Nejprve musíme zkonstruovat rozklad matice do tvaru SDS^{-1}:

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = SDS^{-1}.$$

Nyní již můžeme spočítat třetí mocninu a druhou odmocninu

$$SD^3S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 729 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1931 & 3990 \\ -1330 & 2724 \end{pmatrix} = C^3,$$

$$SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = C^{\frac{1}{2}}.$$

Cv. 5. U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Řešení:
Nejpracnější způsob: vydělit charakteristický polynom monomy známých vlastních čísel.

Jednodušší, ale stále pracný postup: využít faktu že součin vlastních čísel je determinant matice. (Lze odvodit dosazením 0 do charakteristického polynomu.)

Nejjednodušší způsob: použít fakt, že součet vlastních čísel je roven součty prvků na diagonále, (Plyne z koeficientu u členu t^{n-1} v charakteristickém polynomu.)

Zbývající vlastní číslo je tedy 7.