Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (6) Vlastní čísla I

Definice 1 *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. Pak* $\lambda \in \mathbb{C}$ *je* vlastní číslo *matice* A *a* $x \in \mathbb{C}^n$ *je příslušný* vlastní vektor*, pokud* $Ax = \lambda x, x \neq 0$*.*

Cv. 1. Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 2. Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3. Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Dokažte, že pak platí:

(a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(b) matice αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(c) matice $A+\alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1+\alpha, \ldots, \lambda_n+\alpha$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.