

Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021):

(6) Vlastní čísla I

Definice 1 Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ je příslušný vlastní vektor, pokud $Ax = \lambda x, x \neq 0$.

Cv. 1. Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

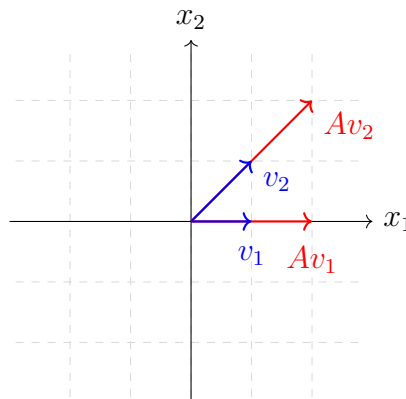
(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Řešení:

(a) Lineární zobrazení $f(x) = Ax$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x , tedy

$$f((x_1, x_2)^T) = 2(x_1, x_2)^T.$$

Libovolný nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ je proto vlastním vektorem matice A – zobrazení f ho dvakrát prodlouží, ale nezmění jeho směr. Vlastním číslem matice A je $\lambda = 2$ odpovídající škálování vektoru x při zobrazení f .

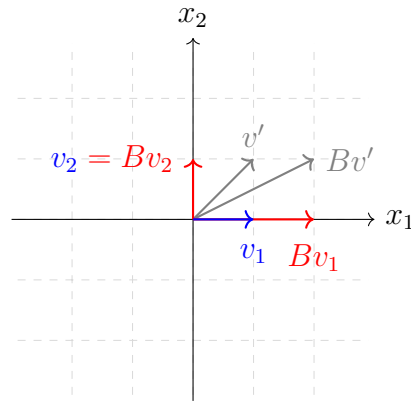


(b) Lineární zobrazení $f(x) = Bx$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x v první souřadnici, tedy

$$f((x_1, x_2)^T) = (2x_1, x_2)^T.$$

Vektory na ose x_1 se dvojnásobně prodlouží a nezmění svůj směr – každý vektor ve tvaru $(\alpha, 0)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tedy vlastním vektorem matice B s příslušným vlastním číslem $\lambda_1 = 2$.

Vektory na ose x_2 se při zobrazení f nezmění, proto také každý vektor $(0, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vlastním vektorem B a odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$. Vektory mimo osy při zobrazení f mění směr.



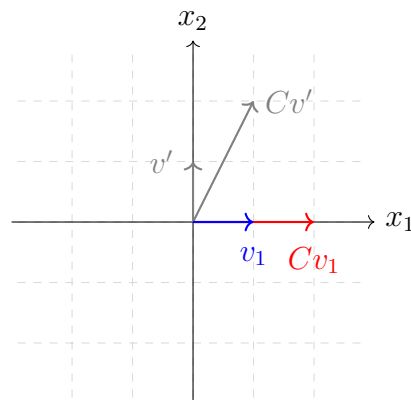
- (c) Lineární zobrazení $f(x) = Cx$ odpovídá zkosení a zároveň zvětšení, pro zobrazení platí

$$f((x_1, x_2)^T) = (2x_1 + x_2, 2x_2)^T.$$

Vlastní vektory matice C jsou všechny nenulové vektory $(\alpha, 0)$ ležící na ose x_1 , protože tyto vektory při zobrazení f směr nemění. Tyto vektory zobrazení dvojnásobně prodlužuje, protože platí

$$f((\alpha, 0)^T) = (2\alpha, 0)^T = 2(\alpha, 0)^T,$$

příslušné vlastní číslo je tedy $\lambda = 2$.



- (d) Lineární zobrazení $f(x) = Dx$ odpovídá rotaci o 90 stupňů v kladném směru. I když to geometricky nevypadá, i tato matice má vlastní čísla a vlastní vektory – komplexní $+i$ a $-i$ s vlastními vektory $(1, i)$ a $(1, -i)$. Geometrické vysvětlení je takové, že násobení imaginární jednotkou i otáčí čísla v komplexní rovině o 90 stupňů.

Cv. 2. Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice nad tělesem \mathbb{C} . Jsou vlastní vektory jednoznačné?

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

1. Charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Jelikož jsou vlastní čísla matice A právě kořeny polynomu $p_A(\lambda)$, můžeme charakteristický polynom využít pro jejich výpočet.

Charakteristický polynom matice C vyjádříme pomocí determinantu:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det(C - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3 - \lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (2 - \lambda)(-3 - \lambda)(-2 - \lambda) + (-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \cdot 0 - \\ &\quad - 2 \cdot (-3 - \lambda) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot (2 - \lambda) - (-1) \cdot 5 \cdot (-2 - \lambda) \\ &= -(\lambda + 1)^3. \end{aligned}$$

Matice C má tedy vlastní číslo $\lambda = -1$. Dále najdeme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) & -1 & 2 \\ 5 & -3 - (-1) & 3 \\ -1 & 0 & -2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. $\{(1, 1, -1)^T\}$. Matice C má (trojnásobné) vlastní číslo $\lambda = -1$, kterému přísluší jeden vlastní vektor $x = (1, 1, -1)^T$.

- Cv. 3.** Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory x_1, \dots, x_n . Dokažte, že pak platí:

- (a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (b) matice αA má vlastní čísla $\alpha \lambda_1, \dots, \alpha \lambda_n$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (c) matice $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Řešení:

- (a) Nechť λ_i je vlastní číslo matice A a x_i je jemu příslušný vlastní vektor. Pak podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme ukázat, že λ_i^2 je vlastní číslo matice $A^2 = AA$ s odpovídajícím vlastním vektorem x_i , tedy, že platí rovnost $A^2 x_i = \lambda_i^2 x_i$. S využitím vztahu $Ax_i = \lambda_i x_i$ dostáváme

$$A^2 x_i = (AA)x_i = A(Ax_i) = A(\lambda_i x_i) = \lambda_i(Ax_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

- (b) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme dokázat, že matice αA má vlastní číslo $\alpha\lambda_i$ a příslušný vlastní vektor x_i , tedy $(\alpha A)x_i = (\alpha\lambda_i)x_i$. Platí:

$$(\alpha A)x_i = \alpha(Ax_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = (\alpha\lambda_i)x_i.$$

- (c) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme dokázat, že pro matici $A + \alpha I_n$ platí rovnost $(A + \alpha I_n)x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i$. Podobně jako v předchozích částech dostaneme:

$$(A + \alpha I_n)x_i = Ax_i + (\alpha I_n)x_i = \lambda_i x_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

- (d) Pro důkaz této části můžeme využít fakt, že vlastní čísla matice A jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Z vlastností determinantu víme, že transpozice matice hodnotu determinantu nemění, tudíž platí

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A^T - \lambda I_n).$$

Protože je ale zároveň $\det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$ charakteristický polynom matice A^T , má matice A^T stejná vlastní čísla jako matice A .

Vlastní vektory matice a její transpozice mohou být obecně různé, např. matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní vektory ve tvaru $(\alpha, 0)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$, zatímco matice $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní vektory ve tvaru $(0, \alpha)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.