Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (5) Determinanty

Definice 1 Determinant *matice* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je*

$$|A| = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} sgn(\pi) \prod_{i\in[n]} A_{i,\pi(i)}.$$

Definice 2 Permanent *matice* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je*

$$perm(A) = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} \prod_{i\in[n]} A_{i,\pi(i)}.$$

Pravidla pro počítání s determinanty:

1. Nechť A' vznikne vynásobením řádku nebo sloupce matice A číslem $c \neq 0$. Pak $c \cdot \det(A) = \det(A')$.
2. Nechť A' vznikne z A přičtením násobku i-tého řádku (sloupce) a k j-tému řádku (sloupci). Pak $\det(A') = \det(A)$.

Cv. 1. Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní k následující maticí nad $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cv. 2. Řešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Cv. 3. Pomocí determinantu rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4. Spočtěte determinant následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}$$

Cv. 5. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že následující determinant matice je dělitelný 17.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

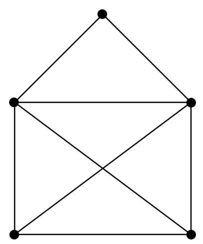
Cv. 6. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $a^T = (3, 1, 1)$, $b^T = (2, 1, 1)$ a $c^T = (2, 3, 2)$.

(Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha a + \beta b + \gamma c$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle$.)

Cv. 7. Nechť lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory
$a^T = (1, 3, 1), b^T = (1, 0, 3), c^T = (1, 1, 1)$ na vektory
$f(a)^T = (3, 1, 0), f(b)^T = (1, 0, 2), f(c)^T = (4, 1, 5)$.

Určete objem elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

Cv. 8. Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu:



Cv. 9. Nechť G je bipartitní graf se stejně velkými partitami. Ukažte, že permanent matice sousednosti grafu G s se rovná počtu perfektních párování G.