Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (5) Determinanty

Definice 1 Determinant *matice* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je*

$$|A| = \sum_{\pi\in\mathbb{S}_n} sgn(\pi) \prod_{i\in[n]} A_{i,\pi(i)}.$$

Definice 2 Permanent *matice* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je*

$$perm(A) = \sum_{\pi\in\mathbb{S}_n} \prod_{i\in[n]} A_{i,\pi(i)}.$$

Pravidla pro počítání s determinanty:

1. Nechť A' vznikne vynásobením řádku nebo sloupce matice A číslem $c \neq 0$. Pak $c \cdot \det(A) = \det(A')$.
2. Nechť A' vznikne z A přičtením násobku i-tého řádku (sloupce) a k j-tému řádku (sloupci). Pak $\det(A') = \det(A)$.

Cv. 1. Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní k následující maticí nad $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Řešení</u>:
Adjungovaná matice: $(\mathrm{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A^{j,i})$, kde $A^{j,i}$ je matice vzniklá odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice A (všimněte si prohození indexů).

Inverze se spočítá: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

$\det(A) = -1 = 4$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Cv. 2. Řešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

<u>Řešení</u>:
Soustavu $Ax = b$ lze řešit Cramerovým pravidlem $x_i = \frac{\det(A_{i\to b})}{\det(A)}$ kde matice $A_{i\to b}$ vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem b.

$\det(A) = -7, x = (1, -1, 2)^T$.

Cv. 3. Pomocí determinantu rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
A je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$. Spočteme determinant:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 2a \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - (5-a) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + (2+3a) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= 2a(-4+4) - (5-a)(12+2) + (2+3a)(-6-1) \\
&= -7a - 84.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že A je singulární právě tehdy, když $a = \frac{84}{-7} = -12$.

Cv. 4. Spočtěte determinant následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:
První řádek přičteme ke všem ostatním. Získáme horní trojúhelníkovou matici, jejíž diagonála je postupně tvořena čísly 1 až n. Determinant matice je tudíž roven $n!$.

Cv. 5. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že následující determinant matice je dělitelný 17.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Plyne z linearity determinantu vůči každému řádku a sloupci. Čísla 697, 476 a 969 dostaneme, když stonásobek prvního a desetinásobek druhého sloupce přičteme ke třetímu sloupci.

Formálně: $\det\begin{pmatrix}6&9&7\\4&7&6\\9&6&9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}6&9&697\\4&7&476\\9&6&969\end{pmatrix} = 17\cdot\det\begin{pmatrix}6&9&\frac{697}{17}\\4&7&\frac{476}{17}\\9&6&\frac{969}{17}\end{pmatrix}$

Poslední matice je celočíselná a má tedy celočíselný determinant.

Cv. 6. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $a^T = (3,1,1)$, $b^T = (2,1,1)$ a $c^T = (2,3,2)$.

(Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha a + \beta b + \gamma c$, kde $\alpha,\beta,\gamma \in \langle 0,1\rangle$.)

Řešení:
Objem rovnoběžnostěnu udává absolutní hodnota determinantu, jehož sloupce tvoří vektory a, b, c neboli $V = \left|\det\begin{pmatrix}3&2&2\\1&1&3\\1&1&2\end{pmatrix}\right| = |-1| = 1.$

Cv. 7. Nechť lineární zobrazení $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ převádí vektory
$a^T = (1,3,1), b^T = (1,0,3), c^T = (1,1,1)$ na vektory
$f(a)^T = (3,1,0), f(b)^T = (1,0,2), f(c)^T = (4,1,5)$.

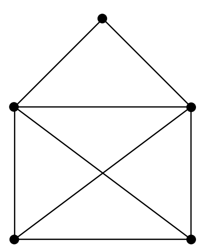
Určete objem elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

Řešení:
Lineární zobrazení splňuje $f(u) = [f]_{KK}u$ pro matici

$$[f]_{KK} = BA^{-1} = \begin{pmatrix}3&1&4\\1&0&1\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&1\\1&3&1\end{pmatrix}^{-1}.$$

Objemy těles při lineárním zobrazení se mění s koeficientem $|\det([f]_{KK})|$, čili $V(f(B_3)) = |\det([f]_{KK})|\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{|\det(B)|}{|\det(A)|}\cdot\frac{4}{3}\pi = \pi$

Cv. 8. Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu:



Řešení:
Počet koster odpovídá determinantu Laplaceova matice bez i-tého řádku a i-tého

sloupce. Laplaceova matice grafu je

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní spočteme determinant matice L bez prvního řádku a sloupce.

$$\begin{aligned} \kappa(G) = \det(L^{1,1}) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 19 & -9 \end{pmatrix} \\ = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 19 & -9 \end{pmatrix} = -4 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 19 & -9 \end{pmatrix} = -4(9 - 19) = 40 \end{aligned}$$

Lze ověřit, že je tomu skutečně tak výčtem všech koster: K_4 má 16 koster a ke každé z nich jsou dvě možnosti, jak připojit horní vrchol (zprava, zleva) — celkem 32 možností. Jinak kostra obsahuje celou stříšku a v tom případ máme 4 možnosti, které obsahují základnu, a 4, které ji neobsahují.

Cv. 9. Nechť G je bipartitní graf se stejně velkými partitami. Ukažte, že permanent matice sousednosti grafu G s se rovná počtu perfektních párování G.

<u>Řešení:</u>
Mějme bipartitní graf $G = (A \dot\cup B, E)$ s $|A| = |B| = n$. Řádky matice sousednosti M_G jsou indexovány vrcholy z A a sloupce jsou indexovány vrcholy z B. Tedy matice M_G má rozměry $n \times n$. Každé perfektní párování v G můžeme chápat jako permutaci na n prvcích. Naopak, pokud máme permutaci π na n prvcích pak výraz $\prod_{i \in [n]} M_G[i, \pi]$ je jedna právě tehdy, když permutace π odpovídá perfektnímu párování. Permanent M_G se tedy skutečně rovná počtu perfektních párování.