

Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021):

(4) Ortogonální matice

Definice 1 (Ortogonální/unitární matice) Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální, pokud $Q^T Q = I_n$. Matice $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je unitární, pokud $\overline{Q}^T Q = I_n$.

Cv. 1. Ukažte, že $\mathcal{R}(A)^T = \text{Ker}(A)$.

Cv. 2. Ukažte, že pokud jsou vektory $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ navzájem na sebe kolmé, pak matice $I_n - q_1 q_1^T, \dots, I_n - q_n q_n^T$ navzájem komutují (vůči násobení matic).

Cv. 3. Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$, $u \neq 0$, Householderova matice.

- (a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.
- (b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.
- (c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq 0$.

Cv. 4. Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Cv. 5. Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

- (a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace PA ?
- (b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p .
- (c) Dokažte, že P je ortogonální matice.
- (d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q . Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?
- (e) Dokažte, že P^T odpovídá permutaci p^{-1} .
- (f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace AP ?

Cv. 6. Rozhodněte o platnosti výroků:

- (a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.
- (b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.