# Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (4) Ortogonální matice

**Definice 1 (Ortogonální/unitární matice)** *Matice* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je* ortogonální, *pokud* $Q^TQ = I_n$. *Matice* $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je* unitární, *pokud* $\overline{Q}^TQ = I_n$.

---

**Cv. 1.** Ukažte, že $\mathcal{R}(A)^T = \mathrm{Ker}(A)$.

***Řešení:***
Dle definice v kernelu matice $A$ jsou právě ty vektory $x$, že $Ax = 0$. Tedy pro každý řádek $A_i$ matice $A$ a každý vektor $x \in \mathrm{Ker}(A)$ platí, že $\langle A_i, x\rangle = 0$.

**Cv. 2.** Ukažte, že pokud jsou vektory $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n$ navzájem na sebe kolmé, pak matice $I_n - q_1q_1^T, \ldots, I - q_nq_n^T$ navzájem komutují (vůči násobení matic).

***Řešení:***
Čistě dle definice:

$$(I_n - q_iq_i^T)\cdot(I_n - q_jq_j^T) = I_n - q_iq_i^T - q_jq_j^T + q_iq_i^Tq_jq_j^T = I_n - q_iq_i^T - q_jq_j^T,$$

protože díky kolmosti platí $q_iq_i^Tq_jq_j^T = q_i(q_i^Tq_j)q_j^T = q_i \cdot 0 \cdot q_j^T = 0$.

**Cv. 3.** Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.
(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.
(c) Rozhodněte, zda $I_n$ je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

***Řešení:***

(a) Ověříme

$$H(u)^T = \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)^T = I_n^T - \frac{2}{u^Tu}(uu^T)^T = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T = H(u),$$

tudíž je $H(u)$ symetrická.

(b) Ověříme ortogonalitu Householderovy matice z definice:

$$\begin{aligned} H(u)^TH(u) = H(u)H(u) &= \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)\left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right) \\ &= I_n - 2\frac{2}{u^Tu}uu^T + \frac{4}{(u^Tu)^2}uu^Tuu^T \\ &= I_n - \frac{4}{u^Tu}uu^T + \frac{4}{(u^Tu)^2}u(u^Tu)u^T = I_n. \end{aligned}$$

(c) Rovnost $H(u) = I_n$ nemůže nikdy nastat, protože to by muselo $\frac{2}{u^Tu}uu^T = 0$.

**Cv. 4.** Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

***Řešení:***
Jsou to pouze dvě:

1. Matice prohození dvou řádků $E_{ij}$.
2. Matice $E_i(\pm 1)$ vynásobení řádku $i$ číslem $\pm 1$.

**Cv. 5.** Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace $PA$?

(b) Nahlédněte, že $P$ vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle $p$.

(c) Dokažte, že $P$ je ortogonální matice.

(d) Nechť $Q$ je permutační matice odpovídající permutaci $q$. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Dokažte, že $P^T$ odpovídá permutaci $p^{-1}$.

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace $AP$?

***Řešení:***

(a) Součin $PA$ zpermutuje řádky matice $A$ podle permutace $p$.
*Důkaz.* Řádek $p(i)$ matice $PA$ má tvar

$$(PA)_{p(i),*} = P_{p(i),*}A = e_i^T A = A_{i,*}.$$

Tudíž v řádku $p(i)$ matice $PA$ je $i$-tý řádek původní matice $A$.

(b) Z předchozího bodu můžeme na matici $P = PI_n$ pohlížet jako na jednotkovou matici, jejíž řádky zpermutujeme podle $p$.

(c) $P$ je ortogonální, protože její řádky tvoří ortonormální systém vektorů, jsou to vlastně zpermutované jednotkové vektory.

(d) Permutaci $p \circ q$ odpovídá matice $PQ$.
*Důkaz (z významu).* Pišme $PQ = P(QI_n)$, tudíž matice $PQ$ vznikne z jednotkové matice tak, že nejprve zpermutujeme řádky podle permutace $q$ a pak podle permutace $p$, což je totéž, jako když je zpermutujeme podle $p \circ q$.
*Důkaz (z definice).* Kdy nastane situace $(PQ)_{ij} = 1$? Protože $(PQ)_{ij} = P_{i,*}Q_{*,j}$, tak situace nastane právě tehdy, když $i$-tý řádek matice $P$ i $j$-tý sloupec matice $Q$ jsou stejné jednotkové vektory, např $e_k$. Protože $P_{i,*} = e_k^T$, je $i = p(k)$. Protože $Q_{*,j} = e_k$, je $k = q(j)$. Tudíž $i = p(k) = p(q(j)) = (p \circ q)(j)$.

(e) Protože $P^T = P^{-1}$, tak máme $P^T P = I_n$. Tudíž permutační matice $P^T$ odpovídá permutaci $p^{-1}$.

(f) Součin $AP$ zpermutuje sloupce matice $A$ podle permutace $p^{-1}$.

*Důkaz.* Tvrzení můžeme snadno nahlédnout z předchozích bodů tak, že vyjádříme $AP = (P^T A^T)^T$, čili matice $P^T A^T$ zpermutuje řádky matice $A^T$ podle permutace $p^{-1}$.

**Cv. 6.** Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

***Řešení:***

(a) Neplatí, uvažujme například matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Její řádky jsou na sebe navzájem kolmé, ale sloupce a sebe navzájem kolmé nejsou.

(b) Platí, protože matice je nutně je ortogonální.