

**Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021):**  
**(3) Ortogonální doplněk a projekce**

**Definice 1 (Ortogonální doplněk)** *Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem a  $M \subseteq V$ . Pak ortogonální doplněk  $M$  je  $M^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in M : \langle x, y \rangle = 0\}$ .*

**Definice 2 (Ortogonální projekce)** *Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem a  $U$  jeho podprostor. Pak projekcí vektoru  $x \in V$  rozumíme takový vektor  $x_U \in U$ , který splňuje*

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|.$$

**Věta 1 (O ortogonální projekci)** *Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem a  $U$  jeho podprostor. Pak pro každé  $x \in V$  existuje právě jedna projekce  $x_U$  do prostoru  $U$ . Navíc pro ortonormální bázi  $z_1, \dots, z_m$  prostoru  $U$  platí, že*

$$x_U = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i \rangle z_i.$$

**Cv. 1.** Pro prostor  $V = \mathbb{R}^4$  určete  $V^\perp$ ,  $\{0\}^\perp$ ,  $\{\cdot\}^\perp$ .

**Cv. 2.** Najděte podprostor  $U \subseteq \mathbb{R}^5$  takový, že  $\dim U = \dim U^\perp$ .

**Cv. 3.** Spočítejte projekci vektoru  $u = (1, 0, 0, -2)^T$  do ortogonálního doplňku prostoru  $V = \text{span}\{v, w\} = \text{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$ .

**Cv. 4.** Určete ortogonální projekci  $p$  vektoru  $a = (2, 2, 1, 5)^T$  do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$Z = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce  $[p]_Z$  vzhledem k bázi  $Z$ .

**Cv. 5.** Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení  $x'$  soustavy  $Ax = b$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

Všimněte si, že sloupce matice  $A$  jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby  $\|Ax' - b\|$ .

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy  $A^T Ax = A^T b$ ?

**Cv. 6.** Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

| síla $F$      | 5    | 7    | 8    | 10 | 12   |
|---------------|------|------|------|----|------|
| průtah $\ell$ | 11,1 | 15,4 | 17,5 | 22 | 26,3 |

**Cv. 7.** Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru  $y = ce^{dt}$  při následujících datech.

|                   |    |    |    |    |     |
|-------------------|----|----|----|----|-----|
| $t$ čas           | 1  | 2  | 3  | 4  | 5   |
| $y$ (počet buněk) | 16 | 27 | 45 | 74 | 122 |