Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (3) Ortogonální doplněk a projekce

Definice 1 (Ortogonální doplněk) *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $M \subseteq V$. Pak ortogonální doplněk M je $M^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in M : \langle x, y \rangle = 0\}$.*

Definice 2 (Ortogonální projekce) *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak* projekcí *vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje*

$$||x - x_U|| = \min_{y \in U} ||x - y||.$$

Věta 1 (O ortogonální projekci) *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce x_U do prostoru U. Navíc pro ortonormální bázi $z_1, \ldots, z_m$ prostoru U platí, že*

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Cv. 1. Pro prostor $V = \mathbb{R}^4$ určete $V^\perp, \{0\}^\perp, \{\}^\perp$.

Řešení:
$V^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, 0 \rangle = 0\} = \mathbb{R}^4$. Nakonec $\{\}^\perp = \mathbb{R}^4$, protože na vektory $x \in \mathbb{R}^4$ neklademe žádnou podmínku (neexistuje vektor v $\{\}$, na který by musel být x kolmý).

Cv. 2. Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Řešení:
Takový podprostor nemůže existovat, neboť platí, že $\dim U^\perp = n - \dim U$. Pro $n = 5$ liché vidíme, že $\dim U$ a $\dim U^\perp$ musejí mít rozdílnou paritu a tedy i rozdílnou hodnotu.

Cv. 3. Spočítejte projekci vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do ortogonálního doplňku prostoru $V = \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Řešení:
K řešení problému vede několik možných postupů. V první řadě můžeme určit kolmou projekci vektoru do podprostoru daného vektory v, w a tu od daného vektoru odečíst. Kolmou projekci lze určit zkonstruováním matice projekce do podprostoru $\operatorname{span}\{v, w\}$. Tato matice má tvar $P = A(A^TA)^{-1}A^T$, kde A je matice, která má ve sloupcích vektory v, w. Následně stačí jen spočítat $u - Pu$.

Druhá možnost by byla určit projekci přímo. Provést na vektorech v, w, u Gram-Schmidtovu ortogonalizaci (bez normování v kroku pro u). Uvědomme si, že výsledný vektor získaný z u bude kolmý na podprostor generovaný vektory v, w a vznikl tak, že jsme od u odečetli kolmou projekci.

Poslední možností je využití toho, že projekce do ortogonálního doplňku prostoru $\mathrm{span}\{v, w\}$ se dá vyjádřit pomocí matice $I - P$, tedy řešením je $(I - P)u$. Všimněme si, že $(I - P)u = u - Pu$, což je přesně totéž, jako bychom aplikovali první postup.

Všimněte si, ale že vektor u leží v prostoru V, tedy jeho projekce do $V^{\perp}$ je nulový vektor.

Cv. 4. Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$Z = \left\{ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_Z$ vzhledem k bázi Z.

Řešení:
Protože Z je ortonormální bází podprostoru, můžeme postupovat přímo podle věty o projekci. Souřadnice vzhledem k $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ odpovídají Fourierovým koeficientům:

$$\langle a, z_1 \rangle = 5, \quad \langle a, z_2 \rangle = -2, \quad \langle a, z_3 \rangle = 1,$$

a tedy $[p]_Z = (5, -2, 1)^T$.

Hledanou projekci potom získáme jako součet projekcí vektoru a na jednotlivé vektory dané ortonormální báze:

$$p = \langle a, z_1 \rangle z_1 + \langle a, z_2 \rangle z_2 + \langle a, z_3 \rangle z_3 = (1, 3, 2, 4)^T.$$

Cv. 5. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy $A^T A x = A^T b$?

Řešení:
Přibližné řešení dané soustavy nalezneme jako souřadnice projekce b do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice A. Protože sloupce a_1, a_2 a a_3 matice A jsou vzájemně kolmé, je projekce vektoru b do sloupcového prostoru A přímo dána předpisem

$$b_{\mathcal{S}(A)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle b, a_i \rangle}{\|a_i\|^2} a_i,$$

tedy $b_{\mathcal{S}(A)} = (4, 8, 13, 9)^T$ s koeficienty $x' = (3, -2, 1)^T$. Protože sloupce A jsou navzájem ortogonální (a tedy lineárně nezávislé), je nalezené x' určené jednoznačně.

Výsledná chyba je $\|Ax' - b\| = \sqrt{45}$.

Ano, výsledné řešení je stejné jako řešení soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$.

Cv. 6. Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla F	5	7	8	10	12
průtah ℓ	11,1	15,4	17,5	22	26,3

Řešení:
Použijeme metodu nejmenších čtverců pro přibližné řešení soustavy $Ax = b$. Hledáme takové x', které minimalizuje chybu nalezeného přibližného řešení, tj. x', které minimalizujeme výraz $\|Ax' - b\|_2$. Jinými slovy hledáme x' pro které je Ax' rovno projekci vektoru $b \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matice projekce z $\mathbb{R}^m$ do $\mathcal{S}(A)$ je $A(A^T A)^{-1}A^T$, a proto projekce b do $\mathcal{S}(A)$ je vektor $A(A^T A)^{-1}A^T b$. Pro požadované x' dostáváme vztah $A(A^T A)^{-1}A^T b = Ax'$, tedy $x' = (A^T A)^{-1}A^T b$ a hledané x' je právě řešením soustavy normálních rovnic $A^T Ax' = A^T b$.

Pro zadané hodnoty síly F a průtahu ℓ hledáme koeficienty c a d, pro které platí $cF + d = \ell$ (např. pro první sloupec tabulky $c5 + d = 11{,}1$). Chceme tedy řešit soustavu $Ax = b$ tvaru

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix}.$$

Pro tuto soustavu dostáváme normální soustavu rovnic $A^T Ax' = A^T b$ s maticí

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 382 & 42 \\ 42 & 5 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravých stran

$$A^T b = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 838{,}9 \\ 92{,}3 \end{pmatrix}.$$

Přibližné řešení x' dává směrnici přímky (= koeficient úměrnosti) $c \approx 2{,}1774$ a absolutní člen přímky $d \approx 0{,}16986$.

Cv. 7. Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	1	2	3	4	5
y (počet buněk)	16	27	45	74	122

Řešení:
Po zlogaritmování soustavy dostaneme standardní úlohu nejmenších čtverců. Soustava normálních rovnic má tvar $A^T A = A^T b$, kde

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$$

a

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 16 \\ \ln 27 \\ \ln 45 \\ \ln 74 \\ \ln 122 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \ln 861412331516175761716224000 \approx 62.02062 \\ \ln 175504320 \approx 18,9832 \end{pmatrix}$$

Řešení: $d \approx 0{,}507$, $\ln c \approx 2{,}2753$, $c \approx 9{,}731$.