Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (2) Ortonormální systém a Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Gram-Schmidtova Ortonormalizace
Vstup: $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.
for $k = 1$ **to** n:

$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$

$z_k = \frac{1}{||y_k||} y_k$

endfor
Výstup: $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze prostoru $Span(x_1, \dots, x_n)$.

Definice 1 (Ortogonální projekce) *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak* projekcí *vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje*

$$||x - x_U|| = \min_{y \in U} ||x - y||.$$

Věta 1 (O ortogonální projekci) *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce x_U do prostoru U. Navíc pro ortonormální bázi $z_1, \dots, z_m$ prostoru U platí, že*

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Cv. 1. Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)$.

Cv. 2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1, \dots, z_r\}$ řádkového prostoru následující matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3. Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Cv. 4. Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?
(b) dostane na vstup ortogonální vektory?
(c) dostane na vstup ortonormální vektory?
(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Cv. 5. Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i, i, i)^T$, $x_2 = (0, i, i)^T$, $x_3 = (0, 0, i)^T$.

Cv. 6. Zortonormalizujete bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Cv. 7. Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8, -1, 1, -2]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.