Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (2) Ortonormální systém a Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Gram-Schmidtova Ortonormalizace
Vstup: $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.
for $k = 1$ **to** n:

$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$

$z_k = \frac{1}{||y_k||} y_k$

endfor
Výstup: $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze prostoru $Span(x_1, \dots, x_n)$.

Definice 1 (Ortogonální projekce) *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak* projekcí *vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje*

$$||x - x_U|| = \min_{y \in U} ||x - y||.$$

Věta 1 (O ortogonální projekci) *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce x_U do prostoru U. Navíc pro ortonormální bázi $z_1, \dots, z_m$ prostoru U platí, že*

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Cv. 1. Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)$.

Řešení:
Standardně bychom mohli určit koeficienty lineární kombinace pomocí řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Protože se jedná o ortonormální bázi, můžeme využít toho, že lze koeficienty vyjádřit speciálním způsobem jako $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$ (tzv. *Fourierovy* koeficienty).
Tedy dostáváme $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, kde u_1, u_2, u_3 je zadaná ortonormální báze a

- $\alpha_1 = \langle (3, 2, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T \rangle = \frac{5}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_2 = \langle (3, 2, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_3 = \langle (3, 2, 1)^T, (0, 0, 1)^T \rangle = 1$.

Cv. 2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1, \dots, z_r\}$ řádkového prostoru následující matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Základní myšlenka postupu je: Odečtením projekce x_i do $\mathrm{span}\{z_1, \dots, z_{i-1}\}$ od x_i spočteme nejprve kolmý vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, z_j \rangle z_j$ a ten pak normalizujeme na $z_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$.

Jednotlivé kroky Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace jsou:

- Normalizujeme $y_1 = x_1$: $\|y_1\| = \sqrt{4} = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_2, z_1 \rangle = 5$ a proto $y_2 = (4, 1, 4, 1)^T - 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.
- Normalizujeme y_2: $\|y_2\| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_3, z_1 \rangle = 5$, $\langle x_3, z_2 \rangle = -1$ a tedy $y_3 = (-1, -1, 1, 1)^T$.
- Normalizujeme y_3: $\|y_3\| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Řešením je $Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

Cv. 3. Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Řešení:
Nejprve rozšíříme bázi řádkového prostoru matice A na bázi $\mathbb{R}^4$. Matici převedeme do odstupňovaného tvaru a poté bázi Z rozšíříme např. o vektory z kanonické báze odpovídající všem nebázickým sloupcům. Odstupňovaný tvar matice A je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nebázický je pouze poslední sloupec, a tak lze vzít např. $x_4 = (0, 0, 0, 1)^T$ abychom dostali rozšíření na bázi $\mathbb{R}^4$. Na vektory z_1, z_2, z_3, x_4 nyní aplikujeme Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci a získáme hledané rozšíření na ortonormální bázi.

Jelikož jsme rozšířili ortonormální bázi

$$Z = \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T, (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T, (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T\}$$

řádkového prostoru A, stačí upravit pouze vektor x_4:

- $\langle x_4, z_1 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_2 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_3 \rangle = \frac{1}{2}$, a tudíž $y_4 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$,
- Normalizujeme y_4: $\|y_4\| = \frac{1}{2}$ a získáme $z_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Cv. 4. Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Řešení:

(a) Mějme na vstupu $x_1, \dots, x_n$ a nechť $x_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i x_i$ je vektor lineárně závislý na $x_1, \dots, x_{j-1}$. Buď navíc j nejmenší takové, že tato situace nastane. Lineární závislost znamená, že projekce vektoru x_j do podprostoru $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ je vektor x_j sám. Při Gramově–Schmidtově ortogonalizaci postupně od vektoru odčítáme jeho kolmou projekce do podprostoru tvořeného vektory $x_1, \dots, x_{j-1}$. Tedy ortogonalizace poběží standardně až do chvíle, než se začne ortogonalizovat vektor x_j (proto jsme vzali j nejmenší). Při ortogonalizaci x_j dojte k tomu, že se tento vektor vynuluje.

V okamžiku, kdy budeme chtít tento nulový vektor znormovat (tj. vydělit jeho normou) se program zastaví, protože budeme chtít dělit 0.

(b) Při odčítání kolmé projekce na již zortonormalizované vektory se vektor nemění, neboť všechny projekce budou nulové vektory. Jediné, k čemu dojde, bude normalizace vektorů, které jsme dostali na vstupu.

(c) V tomto případě ani odčítání projekcí (nulových vektorů), ani normování (dělení 1) nemění vstupní vektory. Proto na výstupu dostaneme tytéž vektory, co na vstupu.

(d) Ortogonalizace poběží pro vstup $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ stejně jako pro $x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ stejně až do okamžiku, než přejdeme k ortogonalizaci i-tého vektoru. Označme jako p kolmou projekci i-tého vektoru do podprostoru $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Vektor p bude mít pro x_i a $-x_i$ opačné znaménko, tedy i výsledek po odečtení $y_i = x_i - p$ a $-x_i - (-p) = -x_i + p = -(x_i - p) = -y_i$ bude mít pro tyto případy odlišné znaménko. Normování tento vztah vektorů zachová.

Pro ostatní vektory už k žádné změně nedojde. Odčítáme totiž kolmou projekci do podprostoru, a ta není určena znaménkem bázického vektoru.

Výstupy obou ortogonalizací budou stejné až na znaménko i-tého vektoru.

Cv. 5. Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i,i,i)^T$, $x_2 = (0,i,i)^T$, $x_3 = (0,0,i)^T$.

Řešení:

Pokud bychom nebyli omezeni na provedení Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, mohli bychom odečíst 2. vektor od 1. a 3. vektor od 2. Dostali bychom vektory $(i,0,0)^T$, $(0,i,0)^T$, $(0,0,i)^T$. Ty zřejmě generují stejný prostor jako původní vektory a zároveň jejich normy jsou rovny 1.

Postupujme nyní pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace. Nejprve znormujme vektor $x_1 = (i,i,i)^T$. Norma vektoru je

$$\|x_1\| = \sqrt{\langle x_1, x_1\rangle} = \sqrt{x_1^T \overline{x_1}} = \sqrt{3(i \cdot (-i))} = \sqrt{-3i^2} = \sqrt{3}.$$

Proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T$. Dále

$$\begin{aligned} y_2 &= (0,i,i)^T - \langle x_2, z_1\rangle \tfrac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T = (0,i,i)^T - \tfrac{-2i^2}{\sqrt{3}} \tfrac{1}{\sqrt{3}}(0,i,i)^T \\ &= (0,i,i)^T - \tfrac{2}{3}(i,i,i)^T = \tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T. \end{aligned}$$

Normováním dostáváme

$$z_2 = \frac{1}{\|y_2\|}\frac{1}{3}(-2i,i,i)^T = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{1}{3}(-2i,i,i)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i,i,i).$$

Nakonec

$$y_3 = (0,0,i)^T - \frac{1}{3}(i,i,i)^T - \frac{1}{6}(-2i,i,i)^T = \frac{1}{2}(0,-i,i)^T,$$

a tedy $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,i)^T$.

Řešením je $Z = \left\{z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T,\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i,i,i)^T,\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,i)^T\right\}$.

Cv. 6. Zortonormalizujete bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Řešení:
Množina řešení soustavy má tvar $\{(a-b,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Jedna z možných bází je proto $(0,1,1)^T, (1,1,0)^T$. Po znormalizování prvního vektoru dostaneme $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,1)^T$. Po odečtení projekce od vektoru $(1,1,0)^T$ dostaneme:

$$\begin{aligned}(1,1,0)^T - \left\langle (1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,1)^T \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,1)^T \\ = (1,1,0)^T - \frac{1}{2}^T \cdot (0,1,1) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T.\end{aligned}$$

Nyní stačí normalizovat vektor $\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$. Ten má normu $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Tedy druhý vektor ortnormální báze je $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$. Řešení úlohy se může lišit v závislosti na volbě báze.

Cv. 7. Určete vzdálenost bodu $A = [5,5,3,3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8,-1,1,-2]$ a $C = [4,-2,2,-1]$.

Řešení:
Můžeme postupovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací aplikovanou na vektory odpovídající bodům B, C a A, tj. na vektory $x_1 = (8,-1,1,-2)^T, x_2 = (4,-2,2,-1)^T$ a $x_3 = (5,5,3,3)^T$. Hledaná vzdálenost je rovna právě normě vektoru y_3 z třetího kroku Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, který získáme odečtením projekce x_3 do $\operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ od x_3 (geometrická představa viz strana 177 ve skriptech M. Hladíka – „nakolmení 3. vektoru“).

Zde se vyplatí malý předvýpočet. Vektory x_1, x_2 jsou lineárně nezávislé a navíc

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde řádky x'_1 a x'_2 poslední matice jsou vzájemně kolmé a generují stejnou rovinu jako vektory x_1 a x_2.

Nyní můžeme spočítat projekci vektoru $x_3 = (5,5,3,3)^T$ do roviny generované vektory x'_1 a x'_2:

$$p = \frac{\langle x_3, x'_1 \rangle}{\|x'_1\|^2} x'_1 + \frac{\langle x_3, x'_2 \rangle}{\|x'_2\|^2} x'_2 = \frac{17}{17}(4,0,0,-1)^T + \frac{2}{2}(0,1,-1,0)^T = (4,1,-1,-1)^T.$$

(Protože x_1' a x_2' nemají jednotkovou normu, musíme při hledání projekce pracovat s ortonormálními vektory $\frac{x_1'}{\|x_1'\|}$ a $\frac{x_2'}{\|x_2'\|}$. Proto se ve výraze pro p objevuje ve jmenovatelích $\|x_1'\|^2$ resp. $\|x_2'\|^2$.)

V třetím kroku Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace dostáváme

$$y_3 = x_3 - p = (5,5,3,3)^T - (4,1,-1,-1)^T = (1,4,4,4).$$

Vzdálenost bodu A od roviny obsahující B a C je

$$\|x_3 - p\| = \|y_3\| = \sqrt{1+16+16+16} = 7.$$