Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (1) Skalární součin, norma

Definice 1 (Skalární součin) *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$,* skalární součin *je binární operace $\langle\cdot|\cdot\rangle \to \mathbb{C}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ splňuje:*

1. $\langle x|x\rangle \geq 0$ *a* $\langle x|x\rangle = 0$ *právě když* $x = 0$.
2. $\langle x + y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$.
3. $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$.
4. $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$.

Definice 2 (Norma) *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pak* norma *je zobrazení $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ (respektive $\mathbb{C}$):*

1. $||x|| \geq 0$ *pro všechna* $x \in V$ *a* $||x|| = 0$ *právě když* $x = 0$.
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Věta 1 (Cauchy-Swarzova nerovnost) *Mějme vektorový prostor V se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in V$ platí:*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Cv. 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^n$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(e) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$, tedy standardní skalární součin.

Cv. 2. Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Cv. 3. Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A \coloneqq \|Ax\|$ je také norma.

Cv. 4. Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\mathrm{trace}(A) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A^TB)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\mathrm{trace}(A)^2 \leq n \cdot \mathrm{trace}(A^T A)$.

Cv. 5. Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ právě tehdy když $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cv. 6. Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$

Cv. 7. Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 &\leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 &\leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 &\leq \sqrt{n}\|x\|_2. \end{aligned}$$