

Úlohy ke cvičení – 9.3.2020

GRAM-SCHMIDTOVA ORTONORMALIZACE

Vstup: $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.

for $k = 1$ **to** n :

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$$

$$z_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$$

endfor

Výstup: z_1, \dots, z_n ortonormální báze prostoru $\text{Span}(x_1, \dots, x_n)$.

Definice 1 (Ortogonalní projekce). *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak projekcí vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje*

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|.$$

Věta 2 (O orthogonalní projekci). *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce x_U do prostoru U . Navíc pro ortonormální bázi z_1, \dots, z_m prostoru U platí, že*

$$x_U = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Úloha 1: Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

1. Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem splňuje rovnoběžníkové pravidlo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

2. Pomocí rovnoběžníkového pravidla vyřešte hlavní otázku.

Úloha 2: Určete vzdálenost bodu $\mathbf{b} = (2, 2, 1, 5)^T$ od prostoru zadaného řádky následující matice.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Spočítejte ortonormální bázi (pomocí GS ortonormalizace) řádkového prostoru \mathbf{A} .

- (a) Proveďte Gram-Schmidtovu ortonormalizaci na vektorech $(3, 4)^T$ a $(2, 1)^T$ a načrtněte všechny vektory, které během výpočtu dostanete.
- (b) Co se stane, když Gram-Schmidtova ortogonalizace dostane na vstup
- lineárně závislé vektory?
 - ortogonální vektory?
 - ortonormální vektory?
 - $-x_i$ namísto x_i ?
- (c) Rozšiřte ortonormální báze z příkladu 1 na ortonormální bázi \mathbb{R}^4 .
2. Spočítejte projekci vektoru \mathbf{b} do řádkového prostoru \mathbf{A} a vzdálenost \mathbf{b} od řádkového prostoru \mathbf{A} .
- (a) Jaká je projekce $(-2, 2, 0, 4)^T$ do řádkového prostoru \mathbf{A} ?
- (b) Mějme prostor V , jeho podprostor U a $x \in U$. Jaká je projekce x do U ?

Úloha 3: Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice \mathbf{A} jsou vzájemně kolmé.