

Úlohy ke cvičení – 2.3.2020

Definice 1 (Skalární součin). *Bud' V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, skalární součin je binární operace $\langle \cdot | \cdot \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ splňuje:*

1. $\langle x | x \rangle \geq 0$ a $\langle x | x \rangle = 0$ právě když $x = 0$.
2. $\langle x + y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$.
3. $\langle \alpha x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$.
4. $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$.

Definice 2 (Norma). *Bud' V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pak norma je zobrazení $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ (respektive $\mathbb{C}$):*

1. $\|x\| \geq 0$ pro všechna $x \in V$ a $\|x\| = 0$ právě když $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definice 3 (Metrika). *Mějme množinu M . Metrika na M je zobrazení $d : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in M$:*

1. $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Věta 4 (Cauchy-Swarzova nerovnost). *Mějme vektorový prostor V se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in V$ platí:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Úloha 1: Ukažte, že funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ je norma pro libovolný skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ukažte, že funkce $d(x, y) = \|x - y\|$ je metrika pro libovolnou normu $\| \cdot \|$.

Úloha 2: Ukažte, že $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ je norma nad $\mathbb{C}^n$. A načrtněte jednotkovou kouli pro prostor $\mathbb{R}^2$ s metrikou indukovanou normou $\| \cdot \|_\infty$.

Úloha 3: Určete úhel mezi dvojicemi reálných vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus).

a) $\mathbf{x}^T = (1, -4)$, $\mathbf{y}^T = (8, 2)$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 2, -2)$, $\mathbf{y}^T = (0, 4, 1)$.

Úloha 4: Nechť $|\cdot|$ je norma nad vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$. Indukovanou normu $\| \cdot \|$ nad maticovým prostorem $\mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme jako

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n: |x|=1} |Ax|.$$

Ukažte, že

- a) indukovaná norma je skutečně norma nad prostorem matic,
- b) pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $\|A\| \cdot |x| \geq |Ax|$,
- c) pro libovolné dvě regulární matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí, že $\|A\| \cdot \|B\| \geq \|AB\|$.

Úloha 5: Ukažte, že ortogonální vektory jsou lineárně nezávislé.

Úloha 6: Mějme ortogonální bázi $z_1, \dots, z_n$ prostoru V se skalárním součinem. Ukažte, že pro každé $x \in V$ platí, že $x = \sum_i \langle x, z_i \rangle z_i$.

Úloha 7: Nechť x_i je konvergující posloupnost vektorů z V a $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$. Ukažte, že pokud je $y \in R^n$ kolmý na všechny x_i pak je kolmý i na x .