Úlohy ke cvičení – 17.2.2020

Definice 1 (Skalární součin)**.** *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$,* skalární součin *je binární operace $\langle\cdot|\cdot\rangle \to \mathbb{C}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ splňuje:*

1. $\langle x|x\rangle \geq 0$ *a* $\langle x|x\rangle = 0$ *právě když* $x = 0$.
2. $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$.
3. $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$.
4. $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$.

Úloha 1: Nechť X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.
Označme $\mathbb{K}^X$ množinu všech zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$.
Definujme součet $\oplus$ na $\mathbb{K}^X$ a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad\qquad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

a) Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.
b) Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?
c) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?
d) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K}, X = \mathbb{R}$?

Úloha 2: V prostoru polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 s bazí $X = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$
určete souřadnice $[f]_X$ následujících vektorů
a) $f(x) = x^4 - 1$.
b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
c) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.
d) $f(x) = x^3 + x$.

Úloha 3: Ukažte, že vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $v_1, v_1 + v_2, \ldots, \sum_{i=1}^n v_i$ jsou lineárně nezávislé.

Úloha 4: Najděte bázi prostoru $\{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_3 = x_2 + 2x_4 = x_5\}$.

Úloha 5: Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B' = \big\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,-1)\big\}.$$

a) Najděte bázi B, tak aby A byla maticí přechodu od báze B do báze B'.

b) Najděte bázi B, tak aby A byla maticí přechodu od báze B' do báze B.

Úloha 6: Čemu se rovná $\langle x|\alpha y\rangle$ a $\langle x|y+z\rangle$ ve vektorových prostorech nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$?

Úloha 7: Ukažte, že standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ definovaný jako $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ je skutečně skalární součin.

Úloha 8: Mějme matici A s řádky $v_1, \ldots, v_m$ a matici B se sloupci $w_1, \ldots, w_p$. Čím jsout tvořeny jednotlivé prvky matice AB?

Ukažte, že řádkový prostor a kernel matice jsou navzájem kolmé.