Úlohy ke cvičení – 20.5.2019

Definice 1. *Mějme vektorový prostor V nad $\mathbb{T}$.* Bilineární forma *je zobrazení $b : V^2 \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Tedy $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $u, v, w \in V$ platí,*

$$b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w)$$
$$b(w, \alpha u + \beta v) = \alpha b(w, u) + \beta b(w, v).$$

Definice 2. *Bilineární forma b je symetrická pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro všechna u, v.*

Definice 3. *Zobrazení $f : V \to \mathbb{T}$ je kvadratická forma, pokud se dá vyjádřit $f(u, u) = b(u, u)$ pro nějakou symetrickou bilineární formu b.*

Věta 4 (Sylvestrův zákon setrvačnosti)**.** *Buď $f(x) = x^T Ax$ kvadratická forma. Pak existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky $1, -1, 0$. Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.*

Věta 5 (QR rozklad)**.** *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existuje ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a horní trojúhelníková matice $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s nezápornou diagonálou tak, že $A = QR$.*

Úloha 1: Rozhodněte, zdali platí, že $g(\mathbf{u}) > 0$ pro všechna netriviální $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) $g(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2$

b) $g(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_2x_3$, řešte vzhledem k parametru a.

Je pro ostatní volby a hodnota $g(\mathbf{u}) \le 0$ pro všechna $\mathbf{u}$?

Úloha 2: Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má vzhledem ke kanonické bázi K analytické vyjádření $g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2yt - t^2$, kde $u = (x, y, z, t)^T$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$X = \{(1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 0)^T\}$.

Určete $g(u)$ pro vektor u, který má vůči bázi X souřadnice $[u]_X = (3, 1, 0, 0)^T$.

Úloha 3: Nechť vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ reprezentuje n pozorování, tedy tzv. výběr. Rozptyl výběru je definován jako $\sigma^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, kde $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ je výběrový průměr.

Ukažte, že σ^2 je kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ a určete matici této formy.

Úloha 4: Určete signaturu kvadratické formy g na $\mathbb{R}^3$, která má pro $u = (x, y, z)^T$ následující analytické vyjádření

a) $g(u) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$.

b) $g(u) = x^2 + 6xy + 4xz + 9y^2 + 12yz + 4z^2$.

Úloha 5: Proveďte QR rozklad následující matice.

$$\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$