Úlohy ke cvičení – 6.5.2019

Definice 1. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Matice A je* pozitivně semidefinitní, *pokud pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x^T Ax \geq 0$ a A je* pozitivně definitní, *pokud pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x^T Ax > 0$.*

Věta 2. *Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně definitní (semidefinitní) právě tehdy, když jsou její vlastní čísla čísla kladná (nezáporná).*

Věta 3 (Rekurentní vzorec)**.** *Symetrická matice $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je pozitivně definitní.*

Věta 4 (Choleského rozklad)**.** *Pro každou pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$.*

Věta 5 (Gaussova eliminace)**.** *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když ji Gaussova převede do odstupňovaného tvaru s kladnou diagonálou za použití pouze elementární úpravy přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku pod ním.*

Věta 6 (Sylvestrovo kriterium)**.** *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic $A_1, \ldots, A_n$ jsou kladné, přičemž A_i je levá horní podmatice A velikosti i (tj. vznikne z A odstraněním posledních $n-i$ řádků a sloupců).*

Úloha 1: Ukažte, že čtvercová matice A je negativně (semi)definitní právě tehdy, když $-A$ je pozitivně (semi)definitní.

Úloha 2: Rozhodněte, zdali je následující matice pozitivně definitní pomocí Gaussovy eliminace a derminantů. Pokud ano, nalezněte její Choleského rozklad.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 3: Spočtěte Choleského rozklad matice $\mathbf{A}$ a použijte ho k řešení soustavy $\mathbf{Ax} = (10, 21, -32, 26, 23)^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: Ukažte, že pro pozitivně definitní matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

a) Je i matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ pozitivně definitní.

b) Je i matice $\mathbf{A}^{-1}$ pozitivně definitní (t.j. ukažte zároveň, že $\mathbf{A}$ je regulární).

Úloha 5: Pro jaká $g \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix}$ pozitivně definitní?