Úlohy ke cvičení – 15.4.2019

Definice 1. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je* vlastní číslo *matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ je příslušný* vlastní vektor*, pokud $Ax = \lambda x, x \neq 0$.*

Věta 2 (Cayley-Hamilton)**.** *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Pak $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$.*

Úloha 1: Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místím (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

Úloha 2: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice nad tělesem Z_5. Určete, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 3: Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: S využitím Jordanova normálního tvaru spočtěte třetí mocninu a druhou odmocninu následující matice.

(Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

$$\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

Úloha 5: Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu.
2. Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinaci I_2 a A.
3. Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A.

Úloha 6: Ukažte, že pokud je λ vlastní číslo matice A pak i $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo matice A.