

## Úlohy ke cvičení – 8.4.2019

**Definice 1.** Necht'  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pak  $\lambda \in \mathbb{C}$  je vlastní číslo matice  $A$  a  $x \in \mathbb{C}^n$  je příslušný vlastní vektor, pokud  $Ax = \lambda x, x \neq 0$ .

**Definice 2.** Matice  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  jsou podobné, pokud existuje regulární  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  taková, že  $A = SBS^{-1}$ .

*Úloha 1:* Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

- a)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,
- b)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,
- c)  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ .

*Úloha 2:* U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to 3, -4 a 5. Dopačítejte zbylé vlastní číslo.

*Úloha 3:* Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místním (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

*Úloha 4:* Následující matici převed'te do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*Úloha 5:* S využitím Jordanova normálního tvaru spočtěte třetí mocninu a druhou odmocninu následující matice.

(Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

$$\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$