Úlohy ke cvičení – 1.4.2019

Definice 1. Determinant *matice* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je*

$$|A| = \sum_{\pi\in\mathbb{S}_n} sgn(\pi) \prod_{i\in[n]} A_{i,\pi(i)}.$$

Definice 2. Permanent *matice* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je*

$$perm(A) = \sum_{\pi\in\mathbb{S}_n} \prod_{i\in[n]} A_{i,\pi(i)}.$$

Pravidla pro počítání s determinanty:

1. Nechť A' vznikne vynásobením řádku nebo sloupce matice A číslem $c \neq 0$. Pak $c|A| = |A'|$.
2. Nechť A' vznikne z A vynásobením i-tého řádku (sloupce) a přičtením k j-tému řádku (sloupci). Pak $|A'| = |A|$.

Definice 3. *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Pak* $\lambda \in \mathbb{C}$ *je* vlastní číslo *matice* A *a* $x \in \mathbb{C}^n$ *je příslušný* vlastní vektor*, pokud* $Ax = \lambda x, x \neq 0$.

Definice 4. *Matice* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jsou* podobné*, pokud existuje regulární* $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *taková, že* $A = SBS^{-1}$.

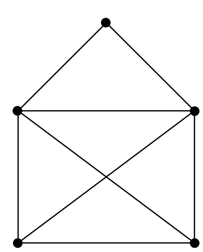
Úloha 1: Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}^T = (3, 1, 1)$, $\mathbf{b}^T = (2, 1, 1)$ a $\mathbf{c}^T = (2, 3, 2)$.

(Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle$.)

Úloha 2: Nechť lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory
$\mathbf{a}^T = (1, 3, 1), \mathbf{b}^T = (1, 0, 3), \mathbf{c}^T = (1, 1, 1)$ na vektory
$f(\mathbf{a})^T = (3, 1, 0), f(\mathbf{b})^T = (1, 0, 2), f(\mathbf{c})^T = (4, 1, 5)$.

Určete objem elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

Úloha 3: Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu:



Úloha 4: Ukažte, že permanent matice sousednosti bipartitního grafu G se rovná počtu perfektních párování G.

Úloha 5: Nechť p je polynom a A matice. Určete vlastní čísla matice $p(A)$.

Úloha 6: Ukažte, že podobné matice mají stejná vlastní čísla.

Úloha 7: Jaké vlastní čísla mají ortogonální matice?