Úlohy ke cvičení – 18.3.2019

Definice 1 (Ortogonální doplněk)**.** *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $M \subseteq V$. Pak ortogonální doplněk M je $M^{\perp} = \{x \in V | \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in M\}$.*

Věta 2 (Cauchy-Swarzova nerovnost)**.** *Mějme vektorový prostor V se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in V$ platí:*

$$\big|\langle x, y \rangle\big| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Definice 3. *Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je* ortogonální*, pokud $Q^T Q = I_n$.*

Úloha 1: Ukažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí, že $n^2 \leq (\sum a_i)(\sum \frac{1}{a_i})$.

Úloha 2: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a M, N podmnožiny V (ne nutně podprostory) dokažte, že

1. $M \cap M^{\perp} \subseteq \{0\}$,
2. $(M^{\perp})^{\perp} = \mathrm{span}(M)$,
3. $M \subseteq N \Rightarrow N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$ a že opačná implikace neplatí,
4. $(M \cup N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$.

Úloha 3: Ukažte, že pokud jsou vektory $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n$ navzájem na sebe kolmé, pak matice $I - q_1 q_1^T, \ldots, I - q_n q_n^T$ navzájem komutují.

Úloha 4: Nechť $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ ortogonální? Je jejich součet $P + Q$ ortogonální?

Úloha 5: Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{uu^T} u^T u, u \neq 0$, Householderova matice. Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.

Úloha 6: Nechť jsou $A, B \in \mathbb{R}^n$ Householderovy matice.

a) Je bloková matice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ také Householderova matice?

b) Je bloková matice $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ Householderova matice?