

Úlohy ke cvičení – 11.3.2019

Definice 1 (Ortogonalní doplněk). *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $M \subseteq V$. Pak ortogonalní doplněk M je $M^\perp = \{x \in V \mid \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in M\}$.*

Úloha 1: Určete vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T$ a $C = (4, -2, 2, -1)^T$.

Úloha 2: Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice \mathbf{A} jsou vzájemně kolmé.

Úloha 3: Ukažte, že projekce je lineární zobrazení a najděte matici projekce z \mathbb{R}^m do sloupcového prostoru matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n .

Úloha 4: Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla	5	7	8	10	12
průtah	11,1	15,4	17,5	22	26,3

Úloha 5:

Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	1	2	3	4	5
y (počet buněk)	16	27	45	74	122

Úloha 6: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a M, N podmnožiny V (ne nutně podprostory) dokažte, že

- $M \cap M^\perp \subseteq \{0\}$,

2. $(M^\perp)^\perp = \text{span}(M)$,

3. $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$ a že opačná implikace neplatí,

4. $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Úloha 7: Ukažte, že pokud jsou vektory $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ navzájem na sebe kolmé, pak matice $I - q_1 q_1^T, \dots, I - q_n q_n^T$ navzájem komutují.