Úlohy ke cvičení – 4.3.2019

Gram-Schmidtova Ortonormalizace

Vstup: $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.

for $k = 1$ **to** n:

$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$

$z_k = \frac{1}{||y_k||} y_k$

endfor

Výstup: $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze prostoru $Span(x_1, \dots, x_n)$.

Definice 1 (Ortogonální projekce)**.** *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak* projekcí *vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje*

$$||x - x_U|| = \min_{y \in U} ||x - y||.$$

Věta 2 (O ortogonální projekci)**.** *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce x_U do prostoru U. Navíc pro ortonormální bázi $z_1, \dots, z_m$ prostoru U platí, že*

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Úloha 1: Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem splňuje rovnoběžníkové pravidlo:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Úloha 2: Může být norma $||x||_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $||x||_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

Úloha 3: V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ určete podle Gram-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r\}$ řádkového prostoru následující matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: Rozšiřte ortonormální báze z příkladu 1 na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Úloha 5: Co se stane, když Gram-Schmidtova ortogonalizace dostane na vstup

1. lineárně závislé vektory?
2. ortogonální vektory?
3. ortonormální vektory?
4. $-x_i$ namísto x_i?

Úloha 6: Pro matice z příkladu 1 určete ortogonální projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

Úloha 7: Mějme prostor V, jeho podprostor U a $x \in U$. Jaká je projekce x do U?

Úloha 8: Určete vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T$ a $C = (4, -2, 2, -1)^T$.

Úloha 9: Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou vzájemně kolmé.