

Úlohy ke cvičení – 18.2.2019

Definice 1 (Skalární součin). *Bud' V vektorový prostor nad \mathbb{C} , skalární součin je binární operace $\langle \cdot | \cdot \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ splňuje:*

1. $\langle x|x \rangle \geq 0$ a $\langle x|x \rangle = 0$ právě když $x = 0$.
 2. $\langle x + y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$.
 3. $\langle \alpha x|y \rangle = \alpha \langle x|y \rangle$.
 4. $\langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$.
-

Úloha 1: Necht' X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.

Označme \mathbb{K}^X množinu všech zobrazení $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.

Definujme součet \oplus na \mathbb{K}^X a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \quad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

- a) Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.
- b) Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?
- c) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?
- d) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K}, X = \mathbb{R}$?

Úloha 2: V prostoru polynomů nad \mathbb{R} stupně nejvýše 4 s bazí $X = (x^4 + x^3, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, x^4 + 1)$

určete souřadnice $[f]_X$ následujících vektorů

- a) $f(x) = x^4 - 1$.
- b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
- c) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.
- d) $f(x) = x^3 + x$.

Úloha 3: Ukažte, že vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $v_1, v_1 + v_2, \dots, \sum_{i=1}^n v_i$ jsou lineárně nezávislé.

Úloha 4: Najděte bázi prostoru $\{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_3 = x_2 + 2x_4 = x_5\}$.

Úloha 5: Necht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, -1)\}.$$

- a) Najděte bázi B , tak aby A byla maticí přechodu od báze B do báze B' .
b) Najděte bázi B , tak aby A byla maticí přechodu od báze B' do báze B .

Úloha 6: Čemu se rovná $\langle x|\alpha y\rangle$ a $\langle x|y+z\rangle$ ve vektorových prostorech nad \mathbb{R} a nad \mathbb{C} ?

Úloha 7: Ukažte, že standardní skalární součin v \mathbb{R}^n definovaný jako $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ je skutečně skalární součin.

Úloha 8: Mějme matici A s řádky v_1, \dots, v_m a matici B se sloupci w_1, \dots, w_p . Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice AB ?

Ukažte, že řádkový prostor a kernel matice jsou navzájem kolmé.