

## Úlohy ke cvičení – 24.5.2018

**Definice 1.** Mějme vektorový prostor  $V$  nad  $\mathbb{T}$ . Bilineární forma je zobrazení  $b : V^2 \rightarrow \mathbb{T}$ , které je lineární v obou složkách. Tedy  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$  a  $u, v, w \in V$  platí,

$$\begin{aligned}b(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha b(u, w) + \beta b(v, w) \\b(w, \alpha u + \beta v) &= \alpha b(w, u) + \beta b(w, v).\end{aligned}$$

**Definice 2.** Bilineární forma  $b$  je symetrická pokud  $b(u, v) = b(v, u)$  pro všechna  $u, v$ .

**Definice 3.** Zobrazení  $f : V \rightarrow \mathbb{T}$  je kvadratická forma, pokud se dá vyjádřit  $f(u, u) = b(u, u)$  pro nějakou symetrickou bilineární formu  $b$ .

**Věta 4** (Sylvestrův zákon setrvačnosti). Bud'  $f(x) = x^T A x$  kvadratická forma. Pak existuje báze, vůči níž má  $f$  diagonální matici s prvky  $1, -1, 0$ . Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.

**Věta 5** (QR rozklad). Pro každou matici  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existuje ortogonální matice  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a horní trojúhelníková matice  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  s nezápornou diagonálou tak, že  $A = QR$ .

---

*Úloha 1:* Rozhodněte, zdali platí, že  $g(\mathbf{u}) > 0$  pro všechna netriviální  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

a)  $g(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2$

b)  $g(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_2x_3$ , řešte vzhledem k parametru  $a$ .

Je pro ostatní volby  $a$  hodnota  $g(\mathbf{u}) \leq 0$  pro všechna  $\mathbf{u}$ ?

*Úloha 2:* Kvadratická forma  $g$  na vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^4$  má vzhledem ke kanonické bázi  $K$  analytické vyjádření  $g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2yt - t^2$ , kde  $u = (x, y, z, t)^T$ . Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$X = \{(1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 0)^T\}.$$

Určete  $g(u)$  pro vektor  $u$ , který má vůči bázi  $X$  souřadnice  $[u]_X = (3, 1, 0, 0)^T$ .

*Úloha 3:* Nechť vektor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  reprezentuje  $n$  pozorování, tedy tzv. výběr.

Rozptyl výběru je definován jako  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , kde  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  je výběrový průměr.

Ukažte, že  $\sigma^2$  je kvadratická forma na  $\mathbb{R}^n$  a určete matici této formy.

*Úloha 4:* Určete signaturu kvadratické formy  $g$  na  $\mathbb{R}^3$ , která má pro  $u = (x, y, z)^T$  následující analytické vyjádření

a)  $g(u) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$ .

b)  $g(u) = x^2 + 6xy + 4xz + 9y^2 + 12yz + 4z^2$ .

*Úloha 5:* Proveďte QR rozklad následující matice.

$$\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$