Úlohy ke cvičení – 10.5.2018

Definice 1. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Matice A je* pozitivně semidefinitní, *pokud pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x^T Ax \geq 0$ a A je* pozitivně definitní, *pokud pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x^T Ax > 0$.*

Věta 2. *Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně definitní (semidefinitní) právě tehdy, když jsou její vlastní čísla čísla kladná (nezáporná).*

Věta 3 (Rekurentní vzorec)**.** *Symetrická matice $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je pozitivně definitní.*

Věta 4 (Choleského rozklad)**.** *Pro každou pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$.*

Věta 5 (Gaussova eliminace)**.** *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když ji Gaussova převede do odstupňovaného tvaru s kladnou diagonálou za použití pouze elementární úpravy přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku pod ním.*

Věta 6 (Sylvestrovo kritérium)**.** *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic $A_1, \dots, A_n$ jsou kladné, přičemž A_i je levá horní podmatice A velikosti i (tj. vznikne z A odstraněním posledních $n-i$ řádků a sloupců).*

Definice 7. *Mějme vektorový prostor V nad $\mathbb{T}$.* Bilineární forma *je zobrazení $b : V^2 \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Tedy $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $u, v, w \in V$ platí,*

$$b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w)$$
$$b(w, \alpha u + \beta v) = \alpha b(w, u) + \beta b(w, v).$$

Definice 8. *Bilineární forma b je symetrická pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro všechna u, v.*

Definice 9. *Zobrazení $f : V \to \mathbb{T}$ je kvadratická forma, pokud se dá vyjádřit $f(u, u) = b(u, u)$ pro nějakou symetrickou bilineární formu b.*

Úloha 1: Ukažte, že pro pozitivně definitní matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

a) Je i matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ pozitivně definitní.

b) Je i matice $\mathbf{A}^{-1}$ pozitivně definitní (t.j. ukažte zároveň, že $\mathbf{A}$ je regulární).

Úloha 2: Pro jaká $g \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix}$ pozitivně definitní?

Úloha 3: Najděte matici, která ukazuje, že Sylvestrovo kritérium nelze přímočaře zobecnit pro testování pozitivní semidefinitnosti matice.

Úloha 4: Ukažte, že výraz $\langle x, y\rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když má tvar $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ pro nějakou pozitivně definitní matici A.

Úloha 5: Rovnice elipsoidu, respektive hyperboloidu, mají tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, respektive $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Ukažte, že jde o kvadratické formy a nalezněte jejich maticové vyjádření.

Úloha 6: Ukažte, že bilineární a kvadratické formy na prostoru V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.