Úlohy ke cvičení – 26.4.2018

Věta 1 (Gerschgorinovy disky)**.** *Každé vlastní číslo λ matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ leží v kruhu o středu a_{ii} a poloměru $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1,\dots,n\}$.*

Věta 2 (Spektrální rozklad symetrických matic)**.** *Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $A = Q\Lambda Q^T$.*

Věta 3 (Courant-Fischer)**.** *Nechť $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak*

$$\lambda_1 = \max_{x:||x||_2=1} x^T Ax, \lambda_n = \min_{x:||x||_2=1} x^T Ax$$

Úloha 1: Ukažte, že pokud je λ vlastní číslo matice A pak i $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo matice A.

Úloha 2: Aniž byste je počítali, rozhodněte, zda následující matice má alespoň 2 reálná vlastní čísla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 3: Rozhodněte, zda následující matice je regulární.

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: Ukažte, že rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetricke matice.

Úloha 5: Buď v vlastní vektor symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte:

$$w \in \{v\}^\perp \Rightarrow Aw \in \{v\}^\perp.$$

Úloha 6: Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické. Dokažte $\lambda_1(A + B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.

Úloha 7: Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická matice s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Dokažte, že $\lambda_1 \geq a_{ii} \geq \lambda_n$ pro každé $i = 1,\dots,n$.