Úlohy ke cvičení – 19.4.2018

Definice 1. *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Pak* $\lambda \in \mathbb{C}$ *je* vlastní číslo *matice* A *a* $x \in \mathbb{C}^n$ *je příslušný* vlastní vektor, *pokud* $Ax = \lambda x, x \neq 0$.

Definice 2. *Matice* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jsou* podobné, *pokud existuje regulární* $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *taková, že* $A = SBS^{-1}$.

Věta 3 (Cayley-Hamilton)**.** *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *a* $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. *Pak* $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$.

Úloha 1: Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu.
2. Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinaci I_2 a A.
3. Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A.

Úloha 2: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice nad tělesem Z_5. Určete, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 3: Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: S využitím Jordanova normálního tvaru spočtěte třetí mocninu a druhou odmocninu následující matice.

(Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

$$\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

Úloha 5: Ukažte, že pokud je λ vlastní číslo matice A pak i $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo matice A.

Úloha 6: Aniž byste je počítali, rozhodněte, zda následující matice má alespoň 2 reálná vlastní čísla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 7: Rozhodněte, zda následující matice je regulární.

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$