Úlohy ke cvičení – 12.4.2018

Definice 1. *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Pak* $\lambda \in \mathbb{C}$ *je* vlastní číslo *matice* A *a* $x \in \mathbb{C}^n$ *je příslušný* vlastní vektor, *pokud* $Ax = \lambda x, x \neq 0$.

Věta 2 (Cayley-Hamilton)**.** *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *a* $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. *Pak* $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$.

Úloha 1: Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechna $\beta > \alpha$.

Úloha 2: Rozhodněte o platnosti: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ majíı stejné charakteristické polynomy pak A, B mají stejná vlastní čísla. Co naopak:A, B mají stejná vlastní čísla pak mají i stejné charakteristické polynomy.

Úloha 3: U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Úloha 4: Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místím (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

Úloha 5: Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu.
2. Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinaci I_2 a A.
3. Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A.