

Úlohy ke cvičení – 5.4.2018

Definice 1. Necht' $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ je příslušný vlastní vektor, pokud $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$.

Definice 2. Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou podobné, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ taková, že $A = SBS^{-1}$.

Úloha 1: Necht' p je polynom a A matice. Určete vlastní čísla matice $p(A)$.

Úloha 2: Ukažte, že podobné matice mají stejná vlastní čísla.

Úloha 3: Jaké vlastní čísla mají ortogonální matice?

Úloha 4: Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Úloha 5: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice nad tělesem Z_5 . Určete, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 6: U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to 3, -4 a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Úloha 7: Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místním (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

Úloha 8: Následující matici převed'te do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 9: S využitím Jordanova normálního tvaru spočtete třetí mocninu a druhou odmocninu následující matice.

(Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

$$\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$