Úlohy ke cvičení – 29.3.2018

Definice 1. Determinant *matice* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je*

$$|A| = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} sgn(\pi) \prod_{i \in [n]} A_{i,\pi(i)}.$$

Definice 2. Permanent *matice* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *je*

$$perm(A) = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} \prod_{i \in [n]} A_{i,\pi(i)}.$$

Pravidla pro počítání s determinanty:

1. Nechť A' vznikne vynásobením řádku nebo sloupce matice A číslem $c \neq 0$. Pak $c|A| = |A'|$.
2. Nechť A' vznikne z A vynásobením i-tého řádku (sloupce) a přičtením k j-tému řádku (sloupci). Pak $|A'| = |A|$.

Úloha 1: Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že následující determinant matice je dělitelný 17.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Úloha 2: Aniž byste rozvinuli oba determinanty, dokažte, že platí:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 3: Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nad $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní k následující maticí nad $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

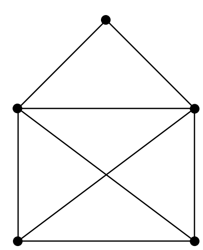
Úloha 5: Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}^T = (3, 1, 1)$, $\mathbf{b}^T = (2, 1, 1)$ a $\mathbf{c}^T = (2, 3, 2)$.

(Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle$.)

Úloha 6: Nechť lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory
$\mathbf{a}^T = (1, 3, 1), \mathbf{b}^T = (1, 0, 3), \mathbf{c}^T = (1, 1, 1)$ na vektory
$f(\mathbf{a})^T = (3, 1, 0), f(\mathbf{b})^T = (1, 0, 2), f(\mathbf{c})^T = (4, 1, 5)$.

Určete objem elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

Úloha 7: Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu:



Úloha 8: Ukažte, že permanent matice sousednosti bipartitního grafu G se rovná počtu perfektních párování G.