Příklad 1. Dokažte, že následující matice jsou ortogonální:

a) Householderova matice $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$ pro $u \neq 0$,

b) Givensova matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Příklad 2. Najděte všechny ortogonální (resp. unitární) diagonální matice řádu n. Kolik jich je?

Příklad 3. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonální matice. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti:

a) Bloková matice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ je ortogonální.

b) Matice $A + B$ je ortogonální.

Příklad 4. Spočítejte determinanty matic:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Pomocí Gaussovy eliminace spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Spočítejte determinanty matic:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 1. Dokažte, že následující matice jsou ortogonální:

a) Householderova matice $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$ pro $u \neq 0$,

b) Givensova matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Příklad 2. Najděte všechny ortogonální (resp. unitární) diagonální matice řádu n. Kolik jich je?

Příklad 3. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonální matice. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti:

a) Bloková matice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ je ortogonální.

b) Matice $A + B$ je ortogonální.

Příklad 4. Spočítejte determinanty matic:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Pomocí Gaussovy eliminace spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Spočítejte determinanty matic:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$