Úlohy ke cvičení – 15.3.2018

Věta 1 (Cauchy-Swarzova nerovnost)**.** *Mějme vektorový prostor V se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in V$ platí:*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Definice 2 (Ortogonální doplněk)**.** *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $M \subseteq V$. Pak ortogonální doplněk M je $M^{\perp} = \{x \in V | \langle x, y\rangle = 0 \forall y \in M\}$.*

Úloha 1: Ukažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí, že $n^2 \leq (\sum a_i)(\sum \frac{1}{a_i})$.

Úloha 2: Ukažte, že projekce je lineární zobrazení a najdětě matici projekce z $\mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n.

Úloha 3: Hookův zákon vyjadřuje lineární úmčrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla	5	7	8	10	12
průtah	11,1	15,4	17,5	22	26,3

Úloha 4:

Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	1	2	3	4	5
y (počet buňek)	16	27	45	74	122

Úloha 5: Aniž byste dopočítávali integrál, ukažte, že pro libovolná $a, b, r \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0, r > 0$ mají funkce $f_a(x) = \sin(ax)$ a $g_b(x) = \cos(bx)$ nulový skalární součin, t.j. jsou na sebe v odpovídajícím vektorovém prostoru kolmé.

Tento součin je dán předpisem: $\langle f_a, g_b\rangle = \int_{-r}^{r} f_a(x) g_b(x) dx$.

Úloha 6: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a M, N podmnožiny V (ne nutně podprostory) dokažte, že

1. $M \cap M^{\perp} \subseteq \{0\}$,

2. $(M^\perp)^\perp = \mathrm{span}(M)$,
3. $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$ a že opačná implikace neplatí,
4. $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Úloha 7: Ukažte, že pokud jsou vektory $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n$ navzájem na sebe kolmé, pak matice $I - q_1 q_1^T, \ldots, I - q_n q_n^T$ navzájem komutují.