

Úlohy ke cvičení – 8.3.2018

GRAM-SCHMIDTOVA ORTONORMALIZACE

Vstup: $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.

for $k = 1$ **to** n :

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$$

$$z_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$$

endfor

Výstup: z_1, \dots, z_n ortonormální báze prostoru $\text{Span}(x_1, \dots, x_n)$.

Definice 1 (Ortogonalní projekce). *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak projekcí vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje*

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|.$$

Věta 2 (O orthogonalní projekci). *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce x_U do prostoru U . Navíc pro ortonormální bázi z_1, \dots, z_m prostoru U platí, že*

$$x_U = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Úloha 1: V prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ určete podle Gram-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r\}$ řádkového prostoru následující matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 2: Rozšiřte ortonormální báze z příkladu 1 na ortonormální bázi \mathbb{R}^4 .

Úloha 3: Co se stane, když Gram-Schmidtova ortogonalizace dostane na vstup

1. lineárně závislé vektory?
2. orthogonalní vektory?
3. ortonormální vektory?

4. $-x_i$ namísto x_i ?

Úloha 4: Pro matice z příkladu 1 určete ortogonální projekci \mathbf{p} vektoru $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z .

Úloha 5: Mějme prostor V , jeho podprostor U a $x \in U$. Jaká je projekce x do U ?

Úloha 6: Určete vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T$ a $C = (4, -2, 2, -1)^T$.

Úloha 7: Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice \mathbf{A} jsou vzájemně kolmé.