Úlohy ke cvičení – 1.3.2018

Definice 1 (Skalární součin)**.** *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$,* skalární součin *je binární operace $\langle\cdot|\cdot\rangle \to \mathbb{C}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ splňuje:*

1. $\langle x|x\rangle \geq 0$ *a* $\langle x|x\rangle = 0$ *právě když* $x = 0$.
2. $\langle x + y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$.
3. $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$.
4. $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$.

Definice 2 (Norma)**.** *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pak* norma *je zobrazení $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ (respektive $\mathbb{C}$):*

1. $||x|| \geq 0$ *pro všechna* $x \in V$ *a* $||x|| = 0$ *právě když* $x = 0$.
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definice 3 (Metrika)**.** *Mějme množinu M.* Metrika *na M je zobrazení $d : M^2 \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in M$:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *a* $d(x, y) = 0$ *právě když* $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Úloha 1: Ukažte, že funkce $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ je norma pro libovolný skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ukažte, že funkce $d(x, y) = ||x - y||$ je metrika pro libovolnou normu $||\cdot||$.

Úloha 2: Určete úhel mezi dvojicemi reálných vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus).

a) $\mathbf{x}^T = (1, -4)$, $\mathbf{y}^T = (8, 2)$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 2, -2)$, $\mathbf{y}^T = (0, 4, 1)$.

Úloha 3: Nechť $|\cdot|$ je norma nad vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$. Indukovanou normu $||\cdot||$ nad maticovým prostorem $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme jako

$$||A|| = \max_{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1} |Ax|.$$

Ukažte, že

a) indukovaná norma je skutečně norma nad prostorem matic,

b) pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $||A|| \cdot |x| \geq |Ax|$,

c) pro libovolné dvě regulární matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí, že $||A|| \cdot ||B|| \geq ||AB||$.

Úloha 4: Ukažte, že $||x||_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ je norma nad $\mathbb{C}^n$. A načrtněte jednotkovou kouli pro prostor $\mathbb{R}^2$ s metrikou indukovanou normou $|| \cdot ||_\infty$.

Úloha 5: Ukažte, že ortogonální vektory jsou lineárně nezávislé.

Úloha 6: Mějme ortogonální bázi $z_1, \ldots, z_n$ prostoru V se skalárním součinem. Ukažte, že pro každé $x \in V$ platí, že $x = \sum_i \langle x, z_i \rangle z_i$.

Úloha 7: Nechť x_i je konvergující posloupnost vektorů z V a $\lim_{i \to \infty} x_i = x$. Ukažte, že pokud je $y \in R^n$ kolmý na všechny x_i pak je kolmý i na x.