Úlohy ke cvičení – 22.2.2018

Definice 1 (Skalární součin)**.** *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$,* skalární součin *je binární operace $\langle\cdot|\cdot\rangle \to \mathbb{C}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ splňuje:*

1. $\langle x|x\rangle \geq 0$ *a* $\langle x|x\rangle = 0$ *právě když* $x = 0$.
2. $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$.
3. $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$.
4. $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$.

Úloha 1: Nechť X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.
Označme $\mathbb{K}^X$ množinu všech zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$.
Definujme součet $\oplus$ na $\mathbb{K}^X$ a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

a) Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.

b) Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?

c) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?

d) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K}, X = \mathbb{R}$?

Úloha 2: V prostoru polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 s bazí $X = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$
určete souřadnice $[f]_X$ následujících vektorů

a) $f(x) = x^4 - 1$.

b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

c) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

d) $f(x) = x^3 + x$.

Úloha 3: Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi K (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2, 4, 1)^T$, $u_2 = (2, 3, 4)^T$ a $u_3 = (3, 0, 1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2, 1, 2)^T$, $f(u_2) = (0, 4, 1)^T$ a $f(u_3) = (4, 4, 1)^T$.

Úloha 4: Ukažte, že platí $[id]_{AB} = ([id]_{BK})^{-1}[id]_{AK}$.

Úloha 5: Čemu se rovná $\langle x|\alpha y\rangle$ a $\langle x|y + z\rangle$ ve vektorových prostorech nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$?

Úloha 6: Ukažte, že standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ definovaný jako $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ je skutečně skalární součin.

Úloha 7: Mějme matici A s řádky $v_1, \ldots, v_m$ a matici B se sloupci $w_1, \ldots, w_p$. Čím jsout tvořeny jednotlivé prvky matice AB?

Ukažte, že řádkový prostor a kernel matice jsou navzájem kolmé.

Úloha 8: Určete úhel mezi dvojicemi reálných vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus).

a) $\mathbf{x}^T = (1, -4)$, $\mathbf{y}^T = (8, 2)$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 2, -2)$, $\mathbf{y}^T = (0, 4, 1)$.