

Domácí úkoly z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):
(8) Lineární zobrazení I

Dcv. 1. (1,5 bodů) Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované maticí

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nalezněte dva různé vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové, že $f(x) = f(y) = (-3, -1, 0)$.

Dcv. 2. (1,5 bodů) Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$ je lineárním zobrazením. Pokud lineárním zobrazením je, vytvořte jeho matici vůči kanonické bázi.

Dcv. 3. (2 body) Rozhodněte, která tvrzení platí a zdůvodněte (tedy dokažte nebo vyvráťte):

- (a) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak $\forall u \in \text{Ker}(A) \cup \text{Ker}(B) : u \in \text{Ker}(A + B)$
- (b) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak $\forall u \in \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B) : u \in \text{Ker}(AB)$
- (c) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak $\forall u \in \text{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B) : u \in \text{Ker}(AB)$
- (d) $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$ a necht' $\mathcal{S}(B) \subseteq \text{Ker}(A)$, pak AB je nulová matice