Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (13) Afinní prostory

Definice 1 (Afinní podprostor) *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak afinní podprostor je jakákoli množina $M \subseteq V$ tvaru*

$$M = U + a = \{v + a : v \in U\},$$

kde $a \in V$ a U je vektorový podprostor V.

Definice 2 (Afinní kombinace) *Mějme vektory $v_1, \dots, v_n$ z vektorového prostoru U nad $\mathbb{T}$. Affinní kombinací rozumíme*

$$\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i,$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{T}$ a $\sum_{i \in [n]} \alpha_i = 1$.

Definice 3 (Afinní nezávislost) *Vektory $x_0, \dots, x_n$ jsou afinně nezávislé pokud jsou vektory $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ lineárně nezávislé.*

Věta 1 *Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2, a buď $\emptyset \neq M \subseteq V$. Pak M je afinní podprostor, tj. je tvaru $M = U + a$ právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$.*

Cv. 1. Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T, x_1 = (2, 2, 1)^T, x_2 = (2, 1, 3)^T, x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

Cv. 2. Rozhodněte, zda $M = N$ a $P = Q$ pro

(a) $M = span\{(1, 2)^T\} + (1, 1)^T, N = span\{(2, 4)^T\} + (2, 4)^T$

(b) $P = span\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T, Q = span\{(0, 3, 2)^T, (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T$

Cv. 3. Ukažte, že množina řešení soustavy $Ax = b$ je afinní prostor a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Cv. 4. Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T, x_1 = (2, 3, 1)^T, x_2 = (1, 3, 2)^T, x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Cv. 5. Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p : y = 5$ a g představuje překloplení podle přímky $q : x = 2$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Cv. 6. Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \dots, x_n$ jsou afinně nezávislé, právě když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T, y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.