Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (13) Afinní prostory

Definice 1 (Afinní podprostor) *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak afinní podprostor je jakákoli množina $M \subseteq V$ tvaru*

$$M = U + a = \{v + a : v \in U\},$$

kde $a \in V$ a U je vektorový podprostor V.

Definice 2 (Afinní kombinace) *Mějme vektory $v_1, \ldots, v_n$ z vektorového prostoru U nad $\mathbb{T}$. Affinní kombinací rozumíme*

$$\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i,$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{T}$ a $\sum_{i \in [n]} \alpha_i = 1$.

Definice 3 (Afinní nezávislost) *Vektory $x_0, \ldots, x_n$ jsou afinně nezávislé pokud jsou vektory $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ lineárně nezávislé.*

Věta 1 *Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2, a buď $\emptyset \neq M \subseteq V$. Pak M je afinní podprostor, tj. je tvaru $M = U + a$ právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$.*

Cv. 1. Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,0,2)^T, x_1 = (2,2,1)^T, x_2 = (2,1,3)^T, x_3 = (3,3,2)^T$$

leží v jedné rovině.

Řešení:
Zadané vektory x_0, x_1, x_2, x_3 leží v jedné rovině právě tehdy, když dimenze afinního podprostory $span\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0\}$ je rovna 2. Nejprve určíme $x_1 - x_0 = (1,2,-1)^T, x_2 - x_0 = (1,1,1)^T, x_3 - x_0 = (2,3,0)^T$ a následně dimenzi jejich lineárního obalu pomocí hodnosti následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnost matice je 2, tedy vektory $x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0$ leží v rovině procházející počátkem a proto x_0, x_1, x_2, x_3 leží v rovině.

Cv. 2. Rozhodněte, zda $M = N$ a $P = Q$ pro

(a) $M = span\{(1,2)^T\} + (1,1)^T, N = span\{(2,4)^T\} + (2,4)^T$

(b) $P = span\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\} + (1,0,0)^T, Q = span\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\} + (2,-1,-1)^T$

Řešení:

(a) Vidíme, že jak M, tak N jsou přímky (afinní podprostory dimenze 1), proto jediný vztah, v jakém mohou tyto afinní podprostory být je rovnost. A rovnost nastane právě tehdy, když libovolný bod z M leží v N a naopak. Například $(1,1)^T \in M$ se musí dát vyjádřit jako $(1,1)^T = \alpha(2,4)^T + (2,4)^T$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. To nám dává soustavu dvou rovnic o 1 neznámé

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2 &= 1 \\ 4\alpha + 4 &= 1, \end{aligned}$$

která nemá řešení. Proto $(1,1)^T \notin M$ a tedy $M \neq N$. Dokonce ani žádný vztah z $M \not\subseteq N$, $N \not\subseteq M$ není možný.

Kdyby bod $(1,1)$ ležel v N ještě by z toho nevyplývalo, že $M = N$ – přímky můžou být různoběžné a bod $(1,1)$ by mohl být jejich průsečík. Museli bychom tedy najít ještě jiný bod (např. $(2,4)$), který by ležel na obou přímkách, pak by byly již shodné.

(b) Opět musí platit, že libovolný vektor $a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T \in P$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ náleží do Q, tedy se dá vyjádřit jako $c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T$ (pro $c, d \in \mathbb{R}$) a naopak. Musí proto platit mezi oběma výrazy rovnost

$$a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T = c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T,$$

která se dá zapsat soustavou tří rovnic jako

$$\begin{aligned} a + 2b + 1 &= 3d + 2 \\ 2a + b &= 3c - 1 \\ a &= 2c - d - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Pokud budeme schopni c, d vyjádřit v závislosti na a, b, znamená to, že pro libovolný vektor z P daný souřadnicemi a, b jsme schopni nalézt odpovídající souřadnice c, d toho samého vektoru v Q. Tedy ukážeme, že $P \subseteq Q$. Podobně, pokud vyjádříme a, b v závislosti na c, d, dostaneme $Q \subseteq P$ a v důsledku $P = Q$.
Pojďme nejprv vyjádřit a, b v závislosti na $c, d \in \mathbb{R}$. Tím soustavu interpretujeme jako parametrickou soustavu, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry a a, b jsou neznámé. Rovnicově

$$\begin{aligned} a + 2b &= 3d + 1 \\ 2a + b &= 3c - 1 \\ a &= 2c - d - 1 \\ c, d &\in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3d+1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 0 & 2c-d-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 2 & 3d+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 2 & -2c+4d+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení soustavy je $a = 2c - d - 1$ a $b = -c + 2d + 1$. Z toho vyplývá, že $Q \subseteq P$. Všimněme si, že jak $span\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\}$ tak $span\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\}$ mají dimenzi 2. Tedy oba afinní prostory P i Q jsou roviny. Z toho tedy můžeme určit, že $P = Q$.

Ověřme ale, ještě početně druhý směr, že skutečně $P \subseteq Q$. Podobně pro $a, b \in \mathbb{R}$ parametry a c, d neznámé interpretujeme soustavu rovnicově

$$\begin{aligned} 3d &= a + 2b - 1 \\ 3c &= 2a + b + 1 \\ 2c - d &= a + 1 \\ a, b &\in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & a+2b-1 \\ 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 0 & 3 & a+2b-1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{3a+3}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} \end{array}\right)$$

Platí, že $\frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} = 0$, tedy soustava má řešení $c = \frac{2a+b+1}{3}$ a $d = \frac{a+2b-1}{3}$. Platí, že $P \subseteq Q$ a v důsledku $P = Q$.

Cv. 3. Ukažte, že množina řešení soustavy $Ax = b$ je afinní prostor a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Řešení:

Označme jako $X = \{x^* \in \mathbb{R}^n | Ax^* = b\}$ množinu řešení soustavy $Ax = b$. Pro $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ (tedy $x_i : Ax_i = b$) má platit, že jejich libovolná afinní kombinace opět náleží do X, totiž

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = b \text{ kde } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Úpravou, kdy vytkneme jednotlivá α_i dostáváme z výrazu na levé straně

$$\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \cdots + \alpha_n A x_n = \alpha_1 b + \alpha_2 b + \cdots + \alpha_n b.$$

Vytkneme zprava vektor b a ze vztahu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ dostáváme

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) b = b.$$

Proto libovolná afinní kombinace řešení soustavy $Ax = b$ je opět jejím řešením.

Cv. 4. Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T, x_1 = (2, 3, 1)^T, x_2 = (1, 3, 2)^T, x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Řešení:

Spočítáme si vektory

$$x_1 - x_0 = (1, 1, -2)^T, x_2 - x_0 = (0, 1, -1)^T, x_3 - x_0 = (1, -1, 0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinně závislé.

Cv. 5. Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p : y = 5$ a g představuje překloplení podle přímky $q : x = 2$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Řešení:

(a) Zobrazení $f(x)$ můžeme zkonstruovat pomocí složení trojice jednodušších afinních zobrazení f_1, f_2, f_3 tak, že nejprve posuneme vektor x o $(0, -5)^T$, provedeme překlopení podél osy x a následně posuneme daný vektor zpět o $(0, 5)^T$. Tato zobrazení můžeme vyjádřit jako

- $f_1(x) = x + (0, -5)^T$ (posunutí o $(0, -5)^T$),
- $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = O_1 x$ (překlopení podle osy x),
- $f_3(x) = x + (0, 5)^T$ (posunutí nazpět o $(0, 5)^T$).

Dostáváme $f(x) = f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(x+(0, -5)^T)) = f_3(O_1(x+(0, -5)^T)) = O_1(x + (0, -5)^T) + (0, 5)^T = O_1 x + (0, 5)^T + (0, 5)^T = O_1 x + (0, 10)^T$.

(b) Zobrazení $g(x)$ můžeme zkonstruovat podobně jako složení g_1, g_2, g_3, kde

- $g_1(x) = x + (-2, 0)^T$,
- $g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = O_2 x$,
- $g_3(x) = x + (2, 0)^T$.

Složením dostáváme $g(x) = g_3(g_2(g_1(x))) = O_2 x + (4, 0)^T$.

(c) Složení $f \circ g = f(g(x)) = f(O_2 x + (4, 0)^T) = O_1(O_2 x + (4, 0)^T) + (0, 10)^T = O_1 O_2 x + O_1(4, 0)^T + (0, 10)^T = O_1 O_2 x + (4, 0)^T + (0, 10)^T = O_1 O_2 x + (4, 10)^T$, po rozepsání maticového součinu

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6. Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou afinně nezávislé, právě když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T, y_1 = (x_1^T, 1)^T, \ldots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

Důležité je zde uvědomit si, co za dodatečnou informaci nám dává struktura vektorů $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Z jejich struktury vyplývá, že $\sum_{i=0}^n \alpha_i y_i = 0 \iff \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i = 0$ a zároveň $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 0$. Jedná se totiž pouze o rozdělení vektorové rovnice na 2 části, kde v první uvažujeme prvních n složek vektorů y_i a v druhé poslední $n+1$. složku. Schematicky,

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff$$

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_n$$

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 + \cdots + \alpha_n \cdot 1 = 0.$$

Důkaz tvrzení si rozdělíme na 2 implikace.

- Lineární závislost $y_0, y_1, \ldots, y_n$ implikuje afinní závislost $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Pokud jsou $y_0, y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé, platí

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i = 0$$

a zároveň existuje $j : \alpha_j \neq 0$. Můžeme proto vyjádřit y_j pomocí ostatních vektorů jako

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} y_i.$$

Speciálně (omezíme-li se na prvních n složek) také

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} x_i.$$

a (omezíme-li se na poslední složky y_i)

$$1 = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j}$$

Vidíme, že x_j se dá vyjádřit jako afinní kombinace zbylých vektorů s koeficienty β_i. Vektory $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou tedy afinně závislé.

- Afinní závislost $x_0, x_1, \ldots, x_n$ implikuje lineární závislost $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Jsou-li $x_0, x_1, \ldots, x_n$ afinně závislé, platí, že existuje j :

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i \text{ a zároveň } \sum_{i \neq j} \beta_i = 1$$

Sloučením obou rovnic dostáváme

$$\begin{pmatrix} x_j \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i \neq j} \beta_i \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

což je ekvivalentní

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i.$$

Množina $y_0, y_1, \ldots, y_n$ je lineárně závislá.