

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):

(12) Lineární zobrazení II

Definice 1 (Lineární zobrazení) Mějme vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f : U \rightarrow V$ je lineární pokud pro každé $x, y \in U$ a $a \in \mathbb{T}$ platí:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(ax) = af(x)$.

Definice 2 (Matice lineárního zobrazení) Mějme lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$, $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ bázi U nad $\mathbb{T}$ a $B_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ bázi V nad $\mathbb{T}$. Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$. Potom matice ${}_{{B_2}}[f]_{{B_1}} \in \mathbb{T}^{m \times n}$ s prvky a_{ij} se nazývá matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B_1, B_2 .

Definice 3 (Matice přechodu) Mějme vektorový prostor U a jeho báze B_1 a B_2 . Matice přechodu od B_1 k B_2 je matice ${}_{{B_2}}[id]_{{B_1}}$.

Cv. 1. Mějme v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ dané báze

$$A = ((1, 2, 0, 1)^T, (4, 1, 3, 1)^T, (3, 1, 3, 4)^T, (2, 0, 2, 2)^T),$$
$$B = ((1, 2, 3, 1)^T, (4, 4, 1, 1)^T, (2, 0, 2, 1)^T, (3, 1, 4, 0)^T).$$

Nalezněte matice přechodu:

- (a) ${}_K[id]_A$, tj. od báze A ke kanonické bázi.
- (b) ${}_B[id]_K$, tj. od kanonické báze k bázi B .
- (c) ${}_B[id]_A$, tj. od báze A k bázi B .

Cv. 2. Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow P^2$ definované

$$f((-a + b + c, -a - b, b - c)) = (a + b + c)x^2 + (-a - b - c)x + (b - c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Vypočtěte bázi a dimenzi jádra a obrazu zobrazení f .

Cv. 3. Nechť prostor polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 má bázi $A = (x^4 + x^3, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, x^4 + 1)$. Určete matici ${}_K[D_x]_A$ pro zobrazení D_x jež funkci $f(x)$ přiřadí její derivaci $f'(x)$.

(Za kanonickou bázi zde považujte $K = (x^0, \dots, x^4)$.)

Cv. 4. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vzhledem k bázím $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ a $B' = \{(1, 1), (2, 0)\}$ má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete obraz vektoru (x, y, z) – vyjádřeného vůči kanonické bázi.