Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (12) Lineární zobrazení II

Definice 1 (Lineární zobrazení) *Mějme vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f : U \to V$ je* lineární *pokud pro každé $x, y \in U$ a $a \in \mathbb{T}$ platí:*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(ax) = af(x)$.

Definice 2 (Matice lineárního zobrazení) *Mějme lineární zobrazení $f : U \to V$, $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ bázi U nad $\mathbb{T}$ a $B_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ bázi V nad $\mathbb{T}$. Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$. Potom matice ${}_{B_2}[f]_{B_1} \in \mathbb{T}^{m \times n}$ s prvky a_{ij} se nazývá* matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B_1, B_2.

Definice 3 (Matice přechodu) *Mějme vektorový prostor U a jeho báze B_1 a B_2.* Matice přechodu od B_1 k B_2 *je matice ${}_{B_2}[id]_{B_1}$.*

Cv. 1. Mějme v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ dané báze
$A = \big((1,2,0,1)^T, (4,1,3,1)^T, (3,1,3,4)^T, (2,0,2,2)^T\big)$,
$B = \big((1,2,3,1)^T, (4,4,1,1)^T, (2,0,2,1)^T, (3,1,4,0)^T\big)$.
Nalezněte matice přechodu:

(a) ${}_K[id]_A$, tj. od báze A ke kanonické bázi.

(b) ${}_B[id]_K$, tj. od kanonické báze k bázi B.

(c) ${}_B[id]_A$, tj. od báze A k bázi B.

<u>Řešení:</u>

(a) Označme P matici přechodu ${}_K[id]_A$. Nechť a_i je i-tý vektor báze A. Všimněte si, že $[a_i]_A = e_i$, tedy souřadnice vektoru a_i vůči bázi A je vektor, kde je na i-tém místě 1 a jinak 0. Matice P musí splňovat pro každé i: $P[a_i]_A = [a_i]_K$, kde K je kanonická báze. Tedy,

$$P[a_i]_A = Pe_i = [a_i]_K.$$

Sloupce matice P tedy tvoří vektory báze A vyjádřené vůči kanonické bázi K:

$$ {}_K[id]_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}. $$

(b) Označme Q matici přechodu ${}_B[id]_K$. Matice Q musí splňovat pro každé i: $Q[b_i]_K = [b_i]_B = [e_i]_K$. Kde b_i je i-tý vektor báze B. Pokud všechny rovnosti zapíšeme maticově získáme rovnost $Q\bar{B} = I_4$, kde sloupce matice $\bar{B}$ jsou vektory báze B vyjádřené vůči K. Z toho tedy dostaneme, že $Q = \bar{B}^{-1}$:

$$_B[id]_K = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Všimněme si také, že zobrazení f, které převádí kanonickou bázi na bázi B, je inverzní zobrazení k zobrazení g, které převádí bázi B na kanonickou. Z předchozího příkladu víme, že matice zobrazení g je právě matice $\bar{B}$. A tedy matice zobrazení f je inverzní k matici $\bar{B}$.

(c) Zobrazení, které zobrazí vektory vyjádřené vůči bázi A na vektory vůči bázi B, se dá rozložit na dvě zobrazení:

- f_1 – zobrazení, které zobrazí vektory vyjádřené vůči bázi A na vektory vyjádřené vůči kanonické bázi.
- f_2 – zobrazení, které zobrazení vektory vyjádřené vůči kanonické bázi na vektory vyjádřené vůči bázi B.

Z prvního příkladu víme, že matice zobrazení f_1 je matice $\bar{A}$, kde sloupce $\bar{A}$ jsou vektory báze A vyjádřené vůči kanonické bázi. Z druhého příkladu víme, že matice zobrazení f_2 je matice $\bar{B}^{-1}$. Matice přechodu $_B[id]_A$ je tedy matice zobrazení $f_2 \circ f_1$, tedy matice $\bar{B}^{-1} \cdot \bar{A}$.

$$_B[id]_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matici $_B[id]_A$ lze také spočítat přímo pomocí řádkových úprav:

$$(\bar{B}|\bar{A}) \sim \cdots \sim (I_n|\bar{B}^{-1}\bar{A}).$$

Cv. 2. Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to P^2$ definované

$$f\big((-a+b+c, -a-b, b-c)\big) = (a+b+c)x^2 + (-a-b-c)x + (b-c), \; a, b, c \in R$$

Vypočtěte bázi a dimenzi jádra a obrazu zobrazení f.

Řešení:

Přímočarý způsob je nalézt matici zobrazení vůči kanonické bázi. Je to správný způsob, ale trochu zdlouhavý, protože pro každý vektor e_i bychom museli určit koeficienty a, b, c (pomocí soustavy rovnic), abychom zjistili, kam se bazické vektory zobrazují.

Ukážeme si elegantnější způsob pomocí jiné, vhodnější báze. Mějme bázi $B = \big((-1,-1,0), (1,-1,1), (1,0,-1)\big)$. Všimněme si, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b+c \\ -a-b \\ b-c \end{pmatrix}.$$

Pro vektor $[(1,0,0)]_B$ nalezneme jeho obraz snadno, protože dosadíme do předpisu funkce f: $a = 1$, $b = 0$ a $c = 0$. Tedy $f\big([(1,0,0)]_B\big) = x^2 - x$ a obdobně:

$$f\big([(0,1,0)]_B\big) = x^2 - x + 1$$
$$f\big([(0,0,1)]_B\big) = x^2 - x - 1$$

Nyní si zvolíme vhodnou bázi pro $\mathcal{P}^2$. Zde se nabízí kanonická: $K = (x^2, x, 1)$. Matice zobrazení f pak vypadá následovně.

$$F = {}_K[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kernel F je tedy generován vektorem $u = (-2, 1, 1)$. Je to i báze kernelu f vyjádřená, ale vůči bázi B, tedy báze $\ker(f)$ tvoří vektor $[(-2,1,1)]_B$. Pokud chceme bázi $\ker(f)$ vyjádřit vůči kanonické bázi, jednoduše spočítáme dle definice:

$$[u]_K = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimenze $\ker(f)$ je tedy 1.

Nyní se podívejme na bázi a dimenzi obrazu. Z odstupňovaného tvaru matice F zjistíme, že báze $\mathcal{S}(F)$ tvoří například vektory $(1,-1,0)$ a $(1,-1,1)$. Tyto vektory jsou souřadnice bazických vektorů vůči bázi K. Bázi obrazu f tedy tvoří vektory (polynomy) $x^2 - x$ a $x^2 - x + 1$, dimenze obrazu je tedy 2.

Cv. 3. Nechť prostor polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 má bázi $A = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$. Určete matici ${}_K[D_x]_A$ pro zobrazení D_x jež funkci $f(x)$ přiřadí její derivaci $f'(x)$.

(Za kanonickou bázi zde považujte $K = (x^0, \dots, x^4)$.)

Řešení:
Platí ${}_K[D_x]_A = {}_K[D_x]_K \cdot {}_K[id]_A$, (t.j. nejprve změníme bázi a pak teprve zderivujeme), kde

$${}_K[id]_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } {}_K[D_x]_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice je tedy

$${}_K[D_x]_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vzhledem k bázím $B = \big\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big\}$ a $B' = \big\{(1,1),(2,0)\big\}$ má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete obraz vektoru (x,y,z) – vyjádřeného vůči kanonické bázi.

Řešení:

Matice A určuje zobrazení f vůči bázi B a B'. Pro určení obrazu (x,y,z) je tedy třeba najít matici přechodu $\bar{B}$ od kanonické báze k B a matici přechodu $\bar{B}'$ od báze B' ke kanonické bázi.

Matice $\bar{B}'$ je snadná – do sloupců dáme vektory B':

$$\bar{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici $\bar{B}$ získáme inverzí matice, která má ve sloupcích vektory báze B:

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matici zobrazení f vůči kanonickým bazím získáme tak, že všechny matice vynásobíme, tedy

$$A' = \bar{B}' A \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Když přenásobíme maticí A' vektor (x,y,z) dostaneme jeho obraz:

$$f\big((x,y,z)\big) = A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 2y + 3z, x - z).$$