Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (11) Lineární zobrazení I

Definice 1 (Lineární zobrazení) *Mějme vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f : U \to V$ je* lineární *pokud pro každé $x, y \in U$ a $a \in \mathbb{T}$ platí:*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(ax) = af(x)$.

Definice 2 (Matice lineárního zobrazení) *Mějme lineární zobrazení $f : U \to V$, $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ bázi U nad $\mathbb{T}$ a $B_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ bázi V nad $\mathbb{T}$. Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$. Potom matice ${}_{B_2}[f]_{B_1} \in \mathbb{T}^{m\times n}$ s prvky a_{ij} se nazývá* matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B_1, B_2.

Definice 3 (Izomorfismus) *Lineární zobrazení f je* isomorfismus *pokud je prosté a „na“.*

Cv. 1. Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f : R \to R$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_1(x) = 0$
(b) $f_2(x) = 1$
(c) $f_3(x) = 2x$
(d) $f_4(x) = x + 1$
(e) $f_5(x) = x^2$
(f) $f_6\big((x, y)\big) = (x + y, x - y, x - y)$

Cv. 2. Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi K.

(a) Osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.
(b) Otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).
(c) Projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \to (x, 0)$.

Cv. 3. Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi K (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2, 4, 1)^T$, $u_2 = (2, 3, 4)^T$ a $u_3 = (3, 0, 1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2, 1, 2)^T$, $f(u_2) = (0, 4, 1)^T$ a $f(u_3) = (4, 4, 1)^T$.

Cv. 4. Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Je f prosté?
(b) Je f na?
(c) Je f izomorfismem?

(d) Existuje k f inverzní zobrazení?

(e) Určete bázi a dimenzi jádra zobrazení $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

(f) Určete bázi a dimenzi obrazu zobrazení $\dim(f(\mathbb{R}^3))$.

Cv. 5. Rozhodněte a zdůvodněte, zda-li jsou vektorové prostory U a V izomorfní a tento izomorfismus nalezněte. Existuje, více izomorfismů mezi prostory U a V?

$$U = Span\big((1,0,0),(0,1,0)\big), V = Span\big((3,2,1),(1,1,1)\big)$$

Cv. 6. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^k = f \circ f^{k-1}$. Ukažte, že pro libovolné $i \geq 1$ platí, že $\mathrm{Ker}(f^i) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{i+1})$.

Cv. 7. Ukažte, že pro (každé dvě) matice $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$